Exercice

1. Déterminons une base de $\ker f$.

   On a $X=(x,y,z)\in\ker f \quad\Leftrightarrow\quad AX=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2x+y-z=0\\ y+z=0\\ 2x-2z=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2x+y-z=0\\ y=-z\\ x=z\end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases}y=-z\\ x=z\end{cases} \Leftrightarrow X=z\,(1,-1,1)$. Donc $\ker f=\operatorname{vect}(w)$ avec $w=(1,-1,1)$.

   Ainsi une base de $\ker f$ est (w)

   Déterminons une base de $\operatorname{Im} f$.

   $$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(X),\quad X=(x,y,z)\in E\}\\ &= \{(2x+y-z, y+z, 2x-2z)\,,\quad x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x\,(2,0,2)+y(1,1,0)+z(-1,1,-1),\quad x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{xu+yv-zw,\quad x,y,z\in\mathbb{R}\} \text{ avec } u=(2,0,2) \text{ et } v=(1,1,0)\\ &= \{xu+yv-z(u-v),\quad x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x-z)u+(y+z)\,v,\quad x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\alpha u+\beta v,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{vect}(u,v)\end{aligned}$$

   Donc une base de $\operatorname{Im} f$ est (u,v)

2. (a) $e_1=(1,0,0),\qquad f(e_1)=(2,0,2),\qquad f^2(e_1)=(2,2,0)$

   Montrons que $\mathcal{B}'=\big(e_1,f(e_1),f^2(e_1)\big)$ est une base de E.

   Il suffit de montrer qu'elle est libre car son cardinal est 3. Supposons qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $ae_1+bf(e_1)+cf^2(e_1)=0$ et montrons que $a=b=c=0$.

   $$ae_1+bf(e_1)+cf^2(e_1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=0$$

   $$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a+2b+c=0\\ 2c=0\\ 2b=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$$

   (b) Après calcul, on trouve $f^3(e_1)=(6,4,2)$.

   Chercher les coordonnées de $f^3(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ revient à chercher $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $f^3(e_1)=xe_1+yf(e_1)+zf^2(e_1)$, c-à-d $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$, ou encore

$\begin{cases} x+2y+2z=6 \\ 2z=4 \\ 2y=2 \end{cases}$. En résolvant ce dernier système, on trouve $(x,y,z)=(0,1,2)$.

(c) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrices des coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}'$. Donc

$$mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f^2(e_1) & f^3(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ f(e_1) \\ f^2(e_1) \end{array}$$

3. (a) Pour $\lambda=-1$, déterminons une base de $\ker(f+id_E)$

On a $X=(x,y,z)\in\ker(f+id_E) \Leftrightarrow AX+X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 2y+z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ y=-z/2 \\ x=z/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{z}{2} \\ x=\frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow X=z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right).$

Donc $\ker(f+id_E)=\text{vect}(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1=(1,-1,2)$.

Pour $\lambda=2$, déterminons une base de $\ker(f-2id_E)$

On a $X=(x,y,z)\in\ker(f-2id_E) \Leftrightarrow AX-2X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \\ 2x-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow X=z\,(2,1,1)$. Donc $\ker(f-2id_E)=\text{vect}(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2=(2,1,1)$.

(b) $E=\ker f\oplus E_{-1}\oplus E_2 \Leftrightarrow \forall X\in E, \exists!\,(A,B,C)\in\ker f\times E_{-1}\times E_2 \quad ; \quad X=A+B+C$

Comme $\begin{cases} \ker f=\text{vect}(w) \\ E_{-1}=\text{vect}(\varepsilon_1) \\ E_2=\text{vect}(\varepsilon_2) \end{cases}$ avec $\begin{cases} w=(1,-1,1) \\ \varepsilon_1=(1,-1,2) \\ \varepsilon_2=(2,1,1) \end{cases}$ alors on obtient :

$E=\ker f\oplus E_{-1}\oplus E_2 \Leftrightarrow \forall X\in E, \exists!\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad ; \quad X=aw+b\varepsilon_1+c\varepsilon_2.$

On pose $X=(x,y,z)$. Alors $X=aw+b\varepsilon_1+c\varepsilon_2 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=x \\ -a-b+c=y \\ a+2b+c=z \end{cases} \overset{\text{(résolution)}}{\Leftrightarrow} \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} a=x-y-z \\ b=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+z \\ c=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y \end{cases}$

Ainsi le triplet (a,b,c) existe et il est unique, d'où $E=\ker f\oplus E_{-1}\oplus E_2$

(c) La base $\mathcal{B}_1$ est la base $(w,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. En effet :

- $f(w)=0$ car $w\in\ker f$ (ici w est le vecteur défini dans la réponse à la question 1)
- $f(\varepsilon_1)=-\varepsilon_1$ car $\varepsilon_1\in\ker(f+id_E)$
- $f(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2$ car $\varepsilon_2\in\ker(f-2id_E)$

$$\text{Donc :} \qquad mat_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(w) & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ w \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}$$

Problème

Partie 1

1. Il suffit de faire les calculs
2. Montrons que $F_1 \bigcap F_2 = \{0\}$.
   $F_1 = \ker(u - id_E) = \{x \in E; u(x) - x = 0\}$ et $F_2 = \ker\left(u^2 + u + 2id_E\right) = \left\{x \in E; u^2(x) + u(x) + 2x = 0\right\}$.
   On vérifie d'abord que $\{0\} \subset F_1 \bigcap F_2$ (facile).
   Montrons que $F_1 \bigcap F_2 \subset \{0\}$. Soit $x \in F_1 \bigcap F_2$. Alors $\begin{cases} u(x) = x \\ u^2(x) + u(x) + 2x = 0 \end{cases}$. En appliquant u à la première égalité, on obtient $u^2(x) = u(x) = x$. Donc d'après la deuxième égalité, $x + x + 2x = 0$. Ce qui donne $x = 0$.
   Ainsi $F_1 \bigcap F_2 = \{0\}$. Donc la somme $F_1 + F_2$ est directe.
3. Montrons que $F_1 \subset F$:
   $$\begin{aligned} x \in F_1 &\Rightarrow (u - id_E)(x) = 0 \\ &\Rightarrow (u^2 + u + 2id_E) \circ (u - id_E)(x) = 0 \\ &\Rightarrow \left(u^3 + u - 2id_E\right)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in F \end{aligned}$$
   Montrons que $F_2 \subset F$:
   $$\begin{aligned} x \in F_2 &\Rightarrow (u^2 + u + 2id_E)(x) = 0 \\ &\Rightarrow (u - id_E) \circ (u^2 + u + 2id_E)(x) = 0 \\ &\Rightarrow \left(u^3 + u - 2id_E\right)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in F \end{aligned}$$
   F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels parce qu'ils sont les noyaux d'applications linéaires.
4. Soit $x \in F$.
   - On pose $y = \left(u^2 + u + 2id_E\right)(x)$. Montrons que $y \in F_1$.

   On a $(u - id_E)(y) = (u - id_E) \circ \left(u^2 + u + 2id_E\right)(x) = 0$ (car $x \in F$). Donc $y \in F_1$.
   - On pose $z = (u + 2id_E) \circ (u - id_E)(x)$. Montrons que $z \in F_2$.

   $$\begin{aligned} \text{On a } \left(u^2 + u + 2id_E\right)(z) &= \left(u^2 + u + 2id_E\right) \circ (u + 2id_E) \circ (u - id_E)(x) \\ &= (u + 2id_E) \circ \left(u^2 + u + 2id_E\right) \circ (u - id_E)(x) \\ &= (u + 2id_E) \circ \left(u^3 + u - 2id_E\right)(x) \end{aligned}$$
   $x \in F \Rightarrow \left(u^3 + u - 2id_E\right) = 0 \Rightarrow \left(u^2 + u + 2id_E\right)(z) = 0 \Rightarrow z \in F_2$
5. (a) $X - 1$ est un polynôme qui a pour seule racine 1. Or 1 n'est pas une racine de $X^2 + X + 2$ donc $X - 1$ et $X^2 + X + 2$ sont premiers entre eux. Ainsi, d'après l'identité de Bézout pour les polynômes, il existe deux polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $U_0\left(X^2 + X + 1\right) + V_0(X - 1) = 1$.

Ce qui implique que $U_0\left(X^2+X+1\right)+V_0(X-1)$ est un polynôme de degré 0. On doit donc avoir $deg(U_0)<1$ (car U_0 multiplie un polynôme de degré 2) et $deg(V_0)<2$ (car V_0 multiplie un polynôme de degré 1).

(b) Pour déterminer l'écriture de id_E sous la forme d'une somme de deux applications linéaires, nous allons d'abord déterminer U_0 et V_0.

Comme $deg(U_0)<1$ et $deg(V_0)<2$ on va poser $U_0=\alpha$ et $V_0=\beta(X-\lambda)$. On obtient :

$$\alpha\left(X^2+X+2\right)+\beta\left(X-\lambda\right)\left(X-1\right)=1$$

On développe cette expression et on procède par identification des coefficients. On obtient $\alpha=\frac{1}{4},\beta=-\frac{1}{4},\lambda=-2$.

D'où $\frac{1}{4}\left(X^2+X+2\right)-\frac{1}{4}\left(X+2\right)\left(X-1\right)=1$. Ce qui nous permet de conclure que :

$$id_E=\frac{1}{4}\left(u^2+u+2id_E\right)-\frac{1}{4}\left(u+2id_E\right)\circ\left(u-id_E\right)$$

6. On sait que la somme F_1+F_2 est directe. Il suffit de montrer que $F=F_1+F_2$.

Soit $x\in F$. D'après (5.b), on peut écrire $x=\underbrace{\frac{1}{4}\left(u^2+u+2id_E\right)(x)}_{x_1}\underbrace{-\frac{1}{4}\left(u+2id_E\right)\circ\left(u-id_E\right)(x)}_{x_2}$.

D'après (4), $\left(u^2+u+2id_E\right)(x)\in F_1$ et $\left(u+2id_E\right)\circ\left(u-id_E\right)(x)\in F_2$ donc $x_1\in F_1$ et $x_2\in F_2$.

Conclusion : $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in F_1$ et $x_2\in F_2$. Donc $F=F_1+F_2$.

7. (a) $$\begin{aligned} F=E &\Rightarrow E=\ker\left(u^3+u-2id_E\right)\\ &\Rightarrow \forall x\in E,\left(u^3+u-2id_E\right)(x)=0\\ &\Rightarrow u^3+u-2id_E=0\\ &\Rightarrow u\circ\left(u^2+id_E\right)=2id_E\\ &\Rightarrow u\circ\left[\frac{1}{2}\left(u^2+id_E\right)\right]=id_E\end{aligned}$$

Donc u est inversible et $u^{-1}=\frac{1}{2}\left(u^2+id_E\right)$

(b) $\operatorname{Im}\left(u-id_E\right)=\{\left(u-id_E\right)(x),x\in E\}$. Or, d'après (4), pour tout $x\in E$,

$$\left(u+2id_E\right)\circ\left(u-id_E\right)(x)\in F_2$$

Donc l'application, $f\ :\ x\ \mapsto\ u+2id_E$ envoie $\operatorname{Im}\left(u-id_E\right)$ dans F_2. Montrons que f est l'isomorphisme recherché.

Dans F_2, l'égalité $id_E=\frac{1}{4}\left(u^2+u+2id_E\right)-\frac{1}{4}\left(u+2id_E\right)\circ\left(u-id_E\right)$ établie dans (5.b) devient :

$$id_E=-\frac{1}{4}\underbrace{\left(u+2id_E\right)}_{=f}\circ\left(u-id_E\right)\qquad\qquad(*)$$

puisque $u^2+u+2id_E$ restreinte à F_2 est l'application nulle. Ainsi, dans F_2, f est bijective et son inverse est $f^{-1}=-\frac{1}{4}\left(u-id_E\right)$.

D'autre part $\forall y\in F_2,f^{-1}(y)=-\frac{1}{4}\left(u-id_E\right)(y)\in\operatorname{Im}\left(u-id_E\right)$. Donc F_2 et $\operatorname{Im}\left(u-id_E\right)$ sont isomorphes.

(c) Montrons que $\operatorname{Im}(u - id_E) \subset F_2$. Pour cela, considérons $y \in \operatorname{Im}(u - id_E)$ et montrons que $y \in F_2$.

$y \in \operatorname{Im}(u - id_E) \Rightarrow$

$\exists x \in E; y = u(x) - x \Rightarrow \begin{cases} u(y) = u^2(x) - u(x) \\ u^2(y) = u^3(x) - u^2(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(y) = u^2(x) - u(x) \\ u^2(y) = -u^2(x) - u(x) + 2x \end{cases}$

(En effet, $E = \ker\left(u^3 + u - 2id_E\right) \Rightarrow \quad \forall x \in E, u^3(x) = -u(x) + 2x$)

Ainsi, $u^2(y) + u(y) + 2y = -u^2(x) - u(x) + 2x + u^2(x) - u(x) + 2u(x) - 2x = 0$. Donc $y \in F_2$.

On en déduit que $\operatorname{Im}(u - id_E) \subset F_2$ et comme ils sont isomorphes et qu'on est en dimension finie, $\operatorname{Im}(u - id_E) = F_2$

Partie 2 : Application

1. $F_1 = \{f \in E; (u - id_E)(f) = 0\} = \{f \in E; f' - f = 0\}$
   $F_2 = \left\{f \in E; \left(u^2 + u + 2id_E\right)(f) = 0\right\} = \{f \in E; f'' + f' + 2f = 0\}$
   Ainsi, les deux équations différentielles sont $f' - f = 0$ et $f'' + f' + 2f = 0$
2. Une base de F_1 est constituée par la fonction $\varphi : t \longmapsto \exp(t)$
   Une base de F_2 est déterminée en résolvant l'équation caractéristique $r^2 + r + 2 = 0$.
   Les solutions sont complexes et conjuguées : $r = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Donc une base de F_2 est (φ_1, φ_2) avec
   $\begin{cases} \varphi_1(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \\ \varphi_2(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \end{cases}$
3. f est une solution réelle de $f''' + f' - 2f = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f \in E \\ f \in \ker\left(u^3 + u - 2id_E\right) \end{cases}$
   On appelle $F = \ker\left(u^3 + u - 2id_E\right)$. Alors, d'après la partie 1, on a $F = F_1 \oplus F_2$. Donc on peut écrire $f = \alpha\varphi + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi$. Ainsi, les solutions de $f''' + f' - 2f = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$f(t) = \alpha\exp(t) + \alpha_1\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \alpha_2\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$