Exercice 1 :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 3X^2P'' - (7X+4)P' + 3P \end{array}$$

1. Mq $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$

   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

   $$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= 3X^2 (\alpha P + \beta Q)'' - (7X+4)(\alpha P + \beta Q)' + 3(\alpha P + \beta Q) \\ &= 3X^2 \left(\alpha P'' + \beta Q''\right) - (7X+4)\left(\alpha P' + \beta Q'\right) + 3(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha \left[3X^2P'' - (7X+4)P' + 3P\right] + \beta\left[3X^2Q'' - (7X+4)Q' + 3Q\right] \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

   Alors, f est linéaire

   De plus, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors : $\deg(f(P)) = \deg\left(3X^2P'' - (7X+4)P' + 3P\right)$

   $$\begin{aligned} &\leq \max\left(\deg\left(3X^2P''\right), \deg\left((7X+4)P'\right), \deg(3P)\right) \\ &\leq \max(2 + \deg P - 2, 1 + \deg P - 1, \deg P) \\ &\leq \deg P \leq 3 \end{aligned}$$

   Alors $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$

   L'ensemble de départ est égal à celui de l'arrivée. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

2. $P \in \ker f \Rightarrow f(P) = 0$

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow 3X^2P'' - (7X+4)P' + 3P = 0 \\ &\Rightarrow 3X^2(6aX + 2b) - (7X+4)\left(3aX^2 + 2bX + c\right) + 3\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right) = 0 \\ &\Rightarrow 18aX^3 + 6bX^2 - 21aX^3 - 14bX^2 - 7cX - 12aX^2 - 8bX - 4c + 3aX^3 + 3bX^2 + 3cX + 3d = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -12a - 5bc = 0 \\ -8b - 4c = 0 \\ -4c + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-5}{12}b \\ c = -2b \\ d = \dfrac{-8}{3}b \end{cases} \\ &\Rightarrow P = \frac{-5}{12}bX^3 + bX^2 - 2bX - \frac{8}{3}b = b\left(\frac{-5}{12}X^3 + X^2 - 2X - \frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

   Alors $\ker f = vect\left\{-\dfrac{5}{12}X^3 + X^2 - 2X - \dfrac{8}{3}\right\}$

   $\Rightarrow$ La famille $\left\{\dfrac{-5}{12}X^3 + X^2 - 2X - \dfrac{8}{3}\right\}$ est une base de $\ker f$ car elle est libre et génératrice

3. $rg\, f = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim\ker f = 4 - 1 = 3$
   $\mathrm{Im} f = vect\left\{f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\right\}$ or :
   $f(1) = 3$
   $f(X) = -(7X+4) + 3X = -4X - 4$
   $f\left(X^2\right) = 3X^2 2 - (7X+4)\,2X + 3X^2 = 6X^2 - 14X^2 - 8X + 3X^2 = -5X^2 - 8X$
   $f\left(X^3\right) = 3X^2 6X - (7X+4)\,3X^2 + 3X^3 = 18X^3 - 21X^3 - 12X^2 + 3X^3 = -12X^2$
   Alors $\mathrm{Im}\, f = vect\left\{3, -4X-4, -5X^2-8X, -12X^2\right\} = vect\left\{3, -4X-4, -5X^2-8X\right\}$
4. $\ker\, f \neq \{0\} \Rightarrow f$ n'est pas injective
   $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow f$ n'est pas surjective
   Donc f n'est pas bijective (n'est pas un automorphisme)

Exercice 2 :

1. $F = vect\{u_1, u_2\} = vect\{(0,6,-1,4), (3,3,1,5)\}$
   Il est clair que la famille $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de F et libre ($u_1$et u_2 sont non colinéaires).
   Donc, c'est une base de F.
   $G = vect\{v_1, v_2, v_3\} = vect\{(1,0,0,0), (1,-1,0,1), (0,2,1,0)\}$
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de G. De plus, elle est libre. En effet, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\, \forall i \in \{1,2,3\}$
   Donc, c'est une base de G
   Alors, $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 3$
2. $a = 2u_2 - u_1$ est de coordonnées : $(-1, 2)$ dans la base $\{u_1, u_2\}$
   $b = 2v_2 + v_3$ est de coordonnées : $(0,2,1)$ dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$
3. Montrons que $u_1 \notin G$
   si $u_1 \in G$ alors $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$
   $$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 6 = -\alpha_2 + 2\alpha_3 \quad \Rightarrow 6 = -4 - 2 \text{ (absurde)} \\ -1 = \alpha_3 \\ 4 = \alpha_2 \end{cases}$$
   Donc $u_1 \notin G$
4. On peut remarquer que $a = 3b \Rightarrow a \in F \cap G$
   $\Rightarrow \dim(F \cap G) \geq 1$. Or, $\dim(F \cap G) \leq 2$ car $F \cap G \subseteq F$
   Donc, $\dim(F \cap G) = 1$,ou $\dim(F \cap G) = 2$ (impossible car $u_1 \notin G, F \cap G \neq F$)
   D'où $\dim(F \cap G) = 1$
5. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$
   F et G ne sont pas supplémentaires car sinon on aura :
   $\dim(F) + \dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) \Rightarrow 2 + 3 = 4$ (absurde)
   D'autre part, $F + G \subset \mathbb{R}^4$ et $\dim(F + G) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) \Rightarrow F + G = \mathbb{R}^4$

Exercice 3 :

1. Montrons que $g^2 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \ker g$

   " $\Rightarrow$ " On suppose que $g^2 = 0$

   $y \in Im\, g \Rightarrow y = g(x),\ x \in E \Rightarrow g(y) = g^2(x) = 0$ car $g^2 = 0 \Rightarrow y \in \ker g$

   Ainsi $\operatorname{Im} g \subset \ker g$

   " $\Leftarrow$ " on suppose que $\operatorname{Im} g \subset \ker g$

   On a $g(x) \in Im\, g \Rightarrow g(x) \in \ker g\,,\ \forall x \in E \Rightarrow g\left(g(x)\right) = 0\,,\ \forall x \in E \Rightarrow g^2(x) = 0\ ,\ \forall x \in E \Rightarrow g^2 = 0$

2. $\dim(E) = 3 \quad g^2 = 0, \quad g \neq 0$

   (a) $g^2 = 0\ \Rightarrow \operatorname{Im} g \subset \ker g$

   $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} g \leq \dim \ker g$

   $\Rightarrow rg(g) \leq \dim \ker g$

   $\Rightarrow \dim(E) - \dim \ker g \leq \dim \ker g$

   $\Rightarrow \dim(E) \leq 2 \dim \ker(g)$

   $\Rightarrow 3 \leq 2 \dim \ker g$

   $\Rightarrow \dim \ker g \geq \dfrac{3}{2}$

   $\Rightarrow \dim \ker g \geq 2$ car $\dim \ker g \in \mathbb{N}$

   Or $\ker g \subset E \Rightarrow \dim \ker g \leq \dim(E) = 3$

   Ainsi, $2 \leq \dim \ker g \leq 3 \Rightarrow \dim \ker g = 2 \quad$ ou $\dim \ker g = 3$

   Si $\dim \ker g = 3$ alors $\ker g = E$ ce qui donne $g = 0$ (absurde)

   Donc $\dim \ker g = 2$

   (b) Puisque $\dim \ker g = 2$ alors $\ker g = vect\{w_2, w_3\}$

   $\Rightarrow w_2 \in \ker g$ et $w_3 \in \ker g$

   $\Rightarrow g\left(w_2\right) = 0$ et $g\left(w_3\right) = 0$

   or $g^2 = 0 \Rightarrow \exists w_1 \in E$ tq $g^2\left(w_1\right) = 0$

   $\Rightarrow g\left(g(w_1)\right) = 0$

   $\Rightarrow g\left(w_1\right) \in \ker g$

   $\Rightarrow g\left(w_1\right) = w_2$

   Cl : il existe une base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de E tq :

   $g\left(w_1\right) = w_2,\ g\left(w_2\right) = 0$ et $g\left(w_3\right) = 0$

   (c) $D = vect\left\{w\right\}$ avec $w \neq 0$

   Montrons que $g(D) \subset D \Leftrightarrow D \subset \ker g$

   " $\Rightarrow$ " Soit $x \in D$. Montrons que $x \in \ker g$

   $x \in D \Rightarrow x = \alpha.w$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

   $\Rightarrow g(x) = g(\alpha.w) \in D$ (par hypothèse)

   $\Rightarrow g(x) = \beta.w$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

   $\Rightarrow \underbrace{g^2(x)}_{=0} = g(\beta.w) = \beta\, g(w)$

$\Rightarrow \beta \underbrace{g(w)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker g$

Alors , $D \subset \ker g$

" $\Leftarrow$ " On suppose que $D \subset \ker g$

Montrons que $g\,(D) \subset D$

$x \in D \Rightarrow x \in \ker g$ (par hyp)

$\Rightarrow g(x) = 0 \in D$ car D est un s.e.v de E

$\Rightarrow g(x) \in D$

Ainsi $g(D) \subset D$