Exercice 1 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 3X^2P'' - (7X+4)P' + 3P \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Donner une base de Ker f
3. Déterminer rg f et Im f
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 :

Dans l'espace réel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (0,6,-1,4)$, $u_2 = (3,3,1,5)$, $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,-1,0,1)$ et $v_3 = (0,2,1,0)$.

Soient $F = \text{Vect}[u_1, u_2]$ et $G = \text{Vect}[v_1, v_2, v_3]$.

1. Déterminer une base de F et une base de G en précisant la dimension de chacun.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $a = 2u_2 - u_1$et $b = 2v_2 + v_3$
3. Montrer que $u_1 \notin G$.
4. En déduire dim $(F \cap G)$ et déterminer $F \cap G$.
5. Donner alors dim $(F + G)$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$? A-t-on $F + G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 3 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vertoriel et g un endomorphisme de E.

1. Montrer que $g^2 = 0 \iff \text{Im } g \subset \text{Ker } g$.
2. On suppose que dim $E = 3$ et que $g^2 = 0$ et $g \neq 0$.
   (a) Déterminer la dimension de Ker g .
   (b) Montrer qu'il existe une base (w_1, w_2, w_3) de E telle que
   $$g(w_1) = w_2, \quad g(w_2) = 0 \quad \text{et} \quad g(w_3) = 0$$
   (c) Soit D une droite vectorielle de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul. Montrer que
   $$g(D) \subset D \iff D \subset \text{Ker } g$$