

---

## Devoir surveillé n°1 en analyse

---

### Exercice 1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,
  - (a) Vérifier que  $n^2 \leq n^2 + 2n < (n + 1)^2$ .
  - (b) En déduire  $E(\sqrt{n^4 + 2n^2})$ .
2. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E_n = \left\{ \sqrt{k} + \frac{n}{\sqrt{k}} : k \in \mathbb{N}^* \right\}$ 
  - (a) Montrer que  $E_n$  admet une borne inférieure et que  $\inf(E_n) \geq 2\sqrt{n}$ .
  - (b) Montrer que  $E_n$  possède un minimum que l'on déterminera.
  - (c) La partie  $E_n$  admet-elle une borne supérieure ?

### Exercice 2

1. Calculer les primitives suivantes en précisant les domaines de validité.
  - (a)  $\int (t^2 + 1)e^t dt$ ,
  - (b)  $\int \frac{dt}{tg(x)+1}$ , (poser  $u = tg(x)$ )
2. On considère les deux intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx.$$

- (a) En utilisant un changement de variable, montrer que  $I = J$ .
- (b) Calculer  $I + J$ .
- (c) En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

### Problème

On pose

$$f(x) = 2\arcsin(x) - \arcsin(\sqrt{2}x)$$

1. Comparer  $\sqrt{1-x^2}$  et  $\sqrt{2}\sqrt{1-2x^2}$  pour  $x \in \left[ \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ .
2. Déterminer le domaine  $D$  de définition de  $f$ .

3. Déterminer le domaine  $D'$  de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D'$ .
4. Étudier la parité de  $f$ .
5. Tracer le tableau de variations de  $f$ .
6. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2\arcsin(x) = \arcsin(\sqrt{2}x)$ .

On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = \left[ \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$

7. (a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque qu'on notera  $h$  et préciser son domaine de définition  $J$
- (b) Étudier la dérivabilité de  $h$ .
8. Soit

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\arcsin(\sqrt{t})} dt$$

- (a) Déterminer le domaine  $D_F$  de définition de  $F$ .
- (b) Déterminer le domaine  $D'_F$  de dérivabilité de  $F$ .
- (c) Montrer que

$$\forall x \in D'_F, F'(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\arcsin(\sqrt{x})\arcsin(\sqrt{2x})}$$

9. Tracer le tableau de variations de  $F$ .