| | | |
|---|---|---|
| $1^{\text{ère}}$ année | Devoir Surveillé No. 2 | IPEIEM |
| MP | Analyse | 2018/2019 |

Exercice 1 : Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. (a) Montrer que la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$
   (b) Déduire que pour tout $x \in [e, e^2]$, on a
$$\frac{\ln 2}{e^2 - e}(x - e) \leq \ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$$
2. On considère la fonction $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$ définie sur $[0, 1[$
   (a) Soient $x_n = 1 - \frac{2}{(4n+1)\pi}$ et $y_n = 1 - \frac{2}{(4n+3)\pi}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n)$ et $f(y_n)$
   (b) Peut-on prolonger $f$ par continuité à $[0, 1]$ ?
   (c) Justifier que $f([0, 1[)$ est un intervalle et que $f([0, 1[) \subset ]-1, 1[$
   (d) i. Soit $t \in ]-1, 1[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \qquad -y_n < t < x_n$$
   ii. En déduire que $f([0, 1[) = ]-1, 1[$

Exercice 2

On considère les fonctions $g, h$ et $f_m$ $(m \in \mathbb{R})$ définies par
$$g(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}(x)} \qquad , \qquad h(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + e^x} \qquad \text{et} \qquad f_m(x) = g(x) + mh(x)$$

1. Vérifier que $g$ est bien définie sur $\left[\ln\left(\sqrt{2} - 1\right), +\infty\right[$
2. Donner le développement limité de $g$ en 0 à l'ordre 3
3. Donner le développement limité de $h$ en 0 à l'ordre 3
4. (a) Montrer que le développement limité de $f_m$ en 0 à l'ordre 3 en fonction de $m$ s'écrit sous la forme suivante :
$$f_m(x) \underset{(0)}{=} 1 + \frac{m}{2} + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{m}{2}\right) + \frac{x^2}{4}\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{48}(7 - 5m) + o\left(x^3\right)$$
   (b) Déduire $f_m(0)$, $\quad f'_m(0)$, $\quad f''_m(0)$ et $f_m^{(3)}(0)$
5. Donner l'équation de la tangente $T_m$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_m$ de $f_m$ au point d'abscisse 0.
6. Discuter, selon le réel $m$, la position relative, au voisinage de 0, de $\mathcal{C}_m$ et $T_m$

Problème

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = \alpha$. On se propose de montrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad \text{Il existe } c \in ]a, b[ \text{ tel que } \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$$

Pour cela, on pose

$$\begin{array}{rcl} g : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \in ]a, b] \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

et on note $\beta = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

1. Montrer que $g$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer sa fonction dérivée
2. Si $\alpha = \beta$, montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ et déduire la propriété $(*)$
3. On suppose que $\alpha < \beta$
   (a) Montrer que si pour tout $x \in ]a, b[, \quad g(x) \leq \beta$ alors $f(x) - f(b) \leq \beta (x - b)$
   (b) En déduire qu'il existe $x_0 \in ]a, b[$ tel que $g(x_0) > \beta$. (On pourra raisonner par l'absurde)
   (c) Montrer qu'il existe $x_1 \in ]a, x_0[$ tel que $g(x_1) = \beta$ et déduire qu'il existe $c \in ]x_1, b[$ tel que $g'(c) = 0$
   (d) Déduire $(*)$
4. Montrer que $f$ vérifie $(*)$ si et seulement si $-f$ l'est aussi
5. On suppose maintenant que $\alpha > \beta$. Déduire la propriété $(*)$.
6. Cette question est facultative.
   Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur $[0, 2\pi]$, ainsi que le point $c$ vérifiant $(*)$.
   Montrer que, dans ce cas, $c$ est unique.