NB : Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

1. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation
2. En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. On note a la solution positive et b la solution négative.
   On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} = f(u_n)$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [0,1]$
5. Calculer u_1, u_2, u_3 et en déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante
6. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes
7. On pose $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, donner sa raison.
   (Indication : écrire $a = \dfrac{1}{1+a}$ et $b = \dfrac{1}{1+b}$)
   (b) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite
   (c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite
8. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

Exercice 2

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$.
On considère les suites $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ définies par : $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ avec $u_0 < v_0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \alpha v_n}{1+\alpha} \qquad ; \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + \beta v_n}{1+\beta}$$

On pose $w_n = v_n - u_n$ (la suite $w = v - u$)

1. Montrer que w est une suite géométrique. Soit q sa raison. Exprimer q en fonction de α et β
2. Vérifier que $0 < q < 1$, en déduire que la suite w est convergente et donner sa limite
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
4. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
   On note L la limite commune à u et v . Posons $a = 1 + \alpha$ et $b = \alpha(1+\beta)$
5. Vérifier que la suite $au + bv$ est constante
6. Calculer alors L en fonction de α, β, u_0 et v_0

Exercice 3

NB : Les questions 1. et 2. sont préliminaires et peuvent être utilisées dans la suite de l'exercice

1. Soit $u = (u_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$). On suppose que u converge vers un réel ℓ.

   Montrer que la suite u est stationnaire et que sa limite ℓ appartient à $\mathbb{Z}$.

   (Indication : on pourra revenir à la définition de la convergence en prenant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{3}$)

2. Soit $v = (v_n)$ une suite réelle positive, on suppose que v ne tend pas vers $+\infty$

   (a) Montrer que v admet une sous-suite bornée

   (b) En déduire que v admet une sous-suite convergente

   Soit x un réel positif, on suppose qu'il est *irrationnel* ($x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$). Soit $(r_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ une suite de rationnels qui converge vers x ($\forall n \in \mathbb{N}, p_n$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$)

3. Supposons que la suite (q_n) ne tend pas vers $+\infty$

   (a) Montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) : $\left(q_{\varphi(n)}\right)$ convergente, soit q sa limite

   (b) Montrer que $\left(q_{\varphi(n)}\right)$ est stationnaire et $q \in \mathbb{N}^*$

   (c) En écrivant $p_n = q_n r_n$, montrer que $\left(p_{\varphi(n)}\right)$ est convergente et par la suite qu'elle est stationnaire et que sa limite $p \in \mathbb{N}^*$

   (d) Montrer que la suite $\left(r_{\varphi(n)}\right)$ est stationnaire et donner sa limite, aboutir à une contradiction

4. Montrer alors que $\lim\limits_{+\infty} q_n = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} p_n = +\infty$