Exercice 1 :

1. Il suffit de montrer que $\forall u,\ u^{'} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f\left(u+\lambda u^{'}\right) = f(u) + \lambda f\left(u^{'}\right)$

2. $u=(x,y,z)\in \ker f \Leftrightarrow f(u)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases}$

   Donc $\ker f = \{(0,0,0)\}$

   $Im\,(f) = \left\{v\in\mathbb{R}^3,\ \exists v\in\mathbb{R}^3,\ v=f(u)\right\}$

   Si $v=(a,b,c)\,;\ u=(x,y,z)\,,\ v=f(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ x+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-b \\ x+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} y=a-b \\ 2z=b+c-y \\ x+z=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-b \\ z=\frac{1}{2}(b+c-a+b) \\ x=b-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-b \\ z=-\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2} \\ x=\frac{a}{2}-\frac{c}{2} \end{cases}$

   Donc $Im(f)=\mathbb{R}^3$

3. $\ker(f)=\{O_{\mathbb{R}^3}\}\,;\ Im\,(f)=\mathbb{R}^3$. Donc f est un automorphisme.

   $f^{-1}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$

   $(a,b,c)\mapsto\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}, a-b, -\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}\right)$

Exercice 2 :

Partie I :

1. On a : $x\in F,\ x\notin F^{'}$, et $x^{'}\notin F,\ x^{'}\in F^{'}$. Soit $u=x+x^{'}$. Montrons que $u\notin F,\ u\notin F^{'}$

   Supposons $u\in F$. Comme $x\in F,\ u-x\in F\Rightarrow x^{'}\in F$ $\quad$ $(absurde)$

   De même, supposons $u\in F^{'}$, on a $x^{'}\in F$, donc $u-x^{'}\in F^{'}\Rightarrow x\in F^{'}$ $\quad$ $(absurde)$

   Ainsi, $u\notin F$ et $u\notin F^{'}$

2. (a) $H,\ H^{'}$ hyperplans. Supposons $H\subset H^{'}$ et montrons que $H=H^{'}$

   $\dim H=\dim E-1=n-1$ et $\dim H^{'}=n-1\Longrightarrow \dim H=\dim H^{'}$

   Ainsi $H=H^{'}$

   (b) Soit $x\notin H$. Montrons que $E=H\oplus vect(x)$

- $H \cap vect(x) = \{0\}$

  Soit $y \in H \cap vect(x) \Longrightarrow \begin{cases} y \in H \\ y \in vect(x) \end{cases}$ Montrons que $y = 0$

  Supposons $y \neq 0,\ y = \alpha x$ avec $\alpha \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\alpha} y \in H \qquad (absurde)$

- D'après la définition d'un hyperplan, $\exists H^{'}$ hyperplan tq $E = H^{'} \oplus vect(x)$. Montrons que $H = H^{'}$

  Soit $\begin{cases} h \in H \\ h \neq 0 \end{cases}$ alors $h \notin vect(x) \Rightarrow h \in H^{'}$

  Ainsi $H \subset H^{'}$, D'où, d'après (a) , $H = H^{'}$

  Conclusion $E = H \oplus vect(x)$

(c) $H \neq H^{'} \Rightarrow \begin{cases} H \subsetneq H^{'} \\ H \subsetneq H \end{cases}$ Donc $\begin{cases} \exists x \in H,\ x \notin H^{'} \\ \exists x^{'} \notin H,\ x^{'} \in H^{'} \end{cases}$

(d) $u = x + x^{'}$; D'après 1) $u \notin H,\ u \notin H^{'}$

Donc d'après 2.b) $E = H \oplus vect(u) = H^{'} \oplus vect(u)$

Partie II :

$F = \{u = (x, y, z) \text{ tq } x - y + 2z = 0\}$

$F^{'} = \{u = (x, y, z) \text{ tq } x + 2y - z = 0\}$

1. (a) $u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow u = (y - 2z, y, z)$

$$\begin{aligned} &= (y, y, 0) + (-2z, 0, z) \\ &= y\,(1, 1, 0) + z\,(-2, 0, 1) \\ &= y u_1 + z u_2 \end{aligned}$$

Donc $F = vect\,(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1, 0)\,,\ u_2 = (-2, 0, 1)$

(b) $u = (x, y, z) \in F' \Leftrightarrow u = (x, y, x + 2y)$

$$\begin{aligned} &= (x, 0, x) + (0, y, 2y) \\ &= x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 2) \end{aligned}$$

Donc $F^{'} = vect\,(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)\ \ v_2 = (0, 1, 2)$

Ainsi $\dim F = \dim F^{'} = 2$

2. On a $F, F^{'}$sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$ car $\dim F = \dim F^{'} = \dim \mathbb{R}^3 - 1$

   Si $x = u_2$ alors $x \in F,\ x \notin F^{'}$

   Si $x^{'} = v_1$ alors $x^{'} \in F^{'},\ x^{'} \notin F$

   On pose $w = x + x^{'}$ D'après I.2) on a $\mathbb{R}^3 = F^{'} \oplus vect(w) = F \oplus vect(w)$