Exercice 1

$$(S): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+(m+1)-mz=1 \\ m^2x+(m+1)^2y+m^2z=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m^2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ y-2mz=1-m \\ (2m+1)y=1-m^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+z+y=1 \\ -2mz+y=1-m \\ (2m+1)y=1-m^2 \end{cases}$$

(S) est de Cramer $\Longleftrightarrow -2m \neq 0$ et $2m+1 \neq 0$

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$ alors (S) est de Cramer, il admet une solution unique

$$\begin{cases} x+z+y=1 \\ -2mz+y=1-m \\ y=\dfrac{1-m^2}{2m+1} \end{cases} \Longrightarrow \quad -2mz = 1-m-\frac{1-m^2}{2m+1} = \cdots = \frac{-m^2+m}{2m+1} \text{ d'où } z = \frac{m-1}{2(2m+1)}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 1-z-y = 1-\frac{m-1}{2(2m+1)}-\frac{1-m^2}{2m+1} = \cdots = \frac{2m^2+3m+1}{2(2m+1)}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{2m^2+3m+1}{2\,(2m+1)}, \frac{1-m^2}{2m+1}, \frac{m-1}{2\,(2m+1)}\right)\right\}$$

- Si $m=0$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases}$$

(S) admet un infinité de solutions

$S_{\mathbb{R}^3} = \{(x, 1, -x);\ x \in \mathbb{R}\}$

- Si $m = -\dfrac{1}{2}$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 2L_2 \\ 4L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Longleftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+z=2 \\ 0=3 \quad \text{(absurde)} \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \emptyset$

Exercice 2 :

1. $(S) : \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y-z=0 \\ 4x+3y+z=-9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -2y-2z=2 \\ -y-3z=-1 \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -2y-2z=2 \\ -4z=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -2y-2z=2 \\ z=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$

   $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1,-2,1)\}$
2. $P(X) = X^6 + X^5 + aX^4 + bX^3 - X^2 + cX + 1$

   $P(1) = 0 \Longleftrightarrow a+b+c=-2$

   $P^{'}(X) = 6X^5 + 5X^4 + 4aX^3 + 3bX^2 - 2X + c$

   $P^{'}(1) = 0 \Longleftrightarrow 6+5+4a+3b-2+c=0 \Longleftrightarrow 4a+3b+c=-9$

   $P(-1) = 0 \Longleftrightarrow 1-1+a-b-1-c+1=0 \Longleftrightarrow a-b-c=0$

   $P(1) = P(-1) = P'(1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-2 \\ a-b-c=0 \\ 4a+3b+c=-9 \end{cases}$

   D'après (1), $\quad a=-1$, $b=-2$ et $c=1$
3. Soit $Q(X) = X^6 + X^5 - X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 1$
   (a) On remarque que Q est le polynôme P trouvé dans 2) donc $Q(1) = Q^{'}(1) = Q(-1) = 0$

   $Q^{'}(X) = 6X^5 + 5X^4 - 4X^3 - 6X^2 - 2X + 1$

   $Q^{''}(X) = 30X^4 + 20X^3 - 12X^2 - 12X - 2$

   $Q^{''}(1) = 30 + 20 - 12 - 12 - 2 = 24 \neq 0$

   $\left.\begin{matrix} Q(1) = Q^{'}(1) = 0 \\ Q^{''}(1) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 1$ est une racine double de Q

   $Q^{'}(-1) = -6 + 5 + 4 - 6 + 2 + 1 = 0$

   $Q^{''}(-1) = 30 - 20 - 12 + 12 - 2 = 8 \neq 0$

   $\left.\begin{matrix} Q(-1) = Q^{'}(-1) = 0 \\ Q^{''}(-1) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow -1$ est une racine double de Q

   (b) Mq $X^2 + X + 1$ divise Q.

   En faisant la division euclidienne de Q par $X^2 + X + 1$, on trouve : $Q = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^4 - 2X^2 + 1\right)$

   d'où $\left(X^2 + X + 1\right)$ divise Q

(c) 1 est une racine double de $Q \Longrightarrow (X-1)^2$ divise Q

-1 est une racine double de $Q \Longrightarrow (X+1)^2$ divise Q

D'après b) $\left(X^2+X+1\right)$ divise Q

On ajoute à cela le fait que Q est unitaire et de degré 6 et on obtient :

$$Q=(X-1)^2(X+1)^2\left(X^2+X+1\right)$$

c'est la factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, la factorisation de Q est $Q=(X-1)^2(X+1)^2(X-j)\left(X-j^2\right)$

Exercice 3 :

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie I

1. Mq $A^2-3A+2I=0$

   $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   $A^2-3A+2I=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A^2-3A+2I=0$

   $\Longleftrightarrow A^2-3A=-2I$

   $\Longleftrightarrow A(A-3I)=-2I$

   $\Longleftrightarrow A\left(-\dfrac{1}{2}(A-3I)\right)=I$

   d'où A est inversible et $A^{-1}=-\dfrac{1}{2}(A-3I)$

3. La division euclidienne de X^n par X^2-3X+2 est : $X^n=\left(X^2-3X+2\right)Q+R(X)$

   avec $\deg R<2 \Rightarrow \deg R \leq 1 \Rightarrow R(X)=aX+b$

   d'où $X^n=\left(X^2-3X+2\right)Q+aX+b$

   - Pour $X=1$: $\quad 1=0+a+b \Longrightarrow a+b=1$
   - Pour $X=2$: $\quad 2^n=0+2a+b \Longrightarrow 2a+b=2^n$

   $\Longrightarrow \begin{cases} a=2^n-1 \\ b=2-2^n \end{cases}$

   d'où $R(X)=(2^n-1)X+(2-2^n)$

4. $X^n=\left(X^2-3X+2\right)Q(X)+aX+b \quad \Longrightarrow \quad A^n=\left(A^2-3A+2I\right)Q(A)+aA+bI$

   d'où $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Partie II

Soit $B = A - 2I$

1. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -B$

2. Montrons par récurrence que $B^n = (-1)^{n+1}\, B \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

   $n = 1 :\qquad B = (-1)^2 B$ vrai

   Supposons $B^n = (-1)^{n+1}\, B$. Montrons que $B^{n+1} = (-1)^{n+2}\, B$

   $B^{n+1} = B^n B = (-1)^{n+1} B.B = (-1)^{n+1}\, B^2 = (-1)^{n+1}(-B) = (-1)^{n+2} B$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*\; B^n = (-1)^{n+1} B$

3. $B = A - 2I \Longrightarrow A = B + 2I \Longrightarrow A^n = (B + 2I)^n$

   B et $2I$ commutent donc on peut appliquer la formule du binôme :

   $A^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B^k\,(2I)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B^k 2^{n-k} = C_n^0 B^0 2^n + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k B^k 2^{n-k}$

   or $B^k = (-1)^{k+1} B,\ \forall k \geq 1$

   d'où $A^n = 2^n I + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\,(-1)^{k+1}\, B 2^{n-k}$

   $= 2^n I + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\,(-1)^{k+1}\, 2^{n-k} \right) B$

   $= 2^n I - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\,(-1)^{k}\, 2^{n-k} \right) B$

   $= 2^n I - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^{k}\, 2^{n-k} - C_n^0\,(-1)^0\, 2^n \right) B$

   $= 2^n I - (-1 + 2)^n\, B + 2^n B$

   $= 2^n I + (2^n - 1)\, B = 2^n I + (2^n - 1)\,(A - 2I)$

   $= 2^n I + 2^n A - 2.2^n I + 2I - A$

   $= (2 - 2^n)\, I + (2^n - 1)\, A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Partie III

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg\, P = 3 \Rightarrow P$ est inversible

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

2. $D = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$

   Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*\ A^n = PD^nP^{-1}$

   $n = 1$ vrai

   Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et Mq $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

   $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}.PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

   D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ A^n = PD^nP^{-1}$

5. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 2^n & 2^{n+1} & 0 \\ 2^n & 2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$