Exercice 1

On considère l'application f définie pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ par : $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ vers $\mathbb{C}^*$
2. Justifier que f induit une bijection de $\mathbb{U}\setminus\{-1\}$ vers $\left\{z \in \mathbb{C}; Reel(z) = \frac{1}{2}\right\}$.
   Dans le plan complexe, préciser la nature géométrique de ces deux ensembles

Exercice 2

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis $A^n, n \in \mathbb{N}^*$
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}
3. On note $U = A + I$, montrer que $U^n = 2^{n-1}U,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. $E_2 = \{M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = M\,{}^tM\}$
   (a) Montrer que $A, C \in E_2$ et $A + C \notin E_2$, $AC \notin E_2$
   (b) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartienne à E_2. On donnera deux formes possibles des matrices de E_2

Exercice 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre le système linéaire homogène : $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ d'inconnue $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   B est-elle inversible ? Justifier.

2. Calculer $B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.

3. Vérifier que $BP = PD$ avec $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et D est la matrice diagonale :

   $D = diag\,(0, -2, 2, 2)$

4. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

5. Montrer que $B = PDP^{-1}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = PD^nP^{-1}$

6. Calculer $B^n, n \in \mathbb{N}^*$