

Chapitre 9

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

(version mise à jour le 20 juin 2020)

Sommaire

9.1 Opérations sur les fonctions dérivables	174
9.1.1 Dérivabilité en un point, sur un intervalle	174
9.1.2 Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables	176
9.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^k	179
9.2.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^k	179
9.2.2 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	179
9.3 Arcs paramétrés	181
9.3.1 Arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^k	181
9.3.2 Longueur d'un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1	182
9.4 Construction d'arcs plans, avec des exemples	184
9.4.1 Étude d'un arc plan au voisinage d'un point	184
9.4.2 Étude d'un arc plan au voisinage d'une branche infinie	186
9.4.3 Étude globale d'un arc plan	188
9.4.4 Une étude complète : le bicorné	193

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec $n \geq 1$.

On étudie donc des *fonctions vectorielles d'une variable réelle*.

Une telle fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par ses *fonctions composantes* $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\forall t \in I, f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni d'une norme quelconque, notée $u \mapsto \|u\|$.

Interprétation cinématique : si $n = 2$ ou $n = 3$, on pourra interpréter la fonction $t \mapsto f(t)$ comme la trajectoire d'un point $M(t) = (x(t), y(t))$ ou $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ du plan ou de l'espace.

Selon le contexte, on parlera de *vecteurs* $f(t)$ ou de *points* $M(t)$ pour désigner les éléments de \mathbb{R}^n .

Rappel : (proposition 5.4.2) pour tout réel t_0 adhérent de I et pour tout vecteur $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i)$$

Pour tout ce qui se rapporte aux *limites* et à la *continuité* des fonctions vectorielles, on est ici dans un cas particulier des notions évoquées dans le chapitre 5 dans le cadre des fonctions entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On se reportera plus particulièrement aux sections 5.4 et 5.5.

En revanche, les notions relatives à la *dérivabilité* n'ont de sens (comme on va le voir ici) que pour les fonctions d'une variable réelle (et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie : pour simplifier, le programme se limite à $E = \mathbb{R}^n$).

9.1 Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

9.1.1 Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition 9.1.1 (taux d'accroissement entre deux points de I)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et soit t_0 un élément de I .

Pour tout $t \neq t_0$, le vecteur $T_f(t_0, t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ est appelé *taux d'accroissement* de f entre t_0 et t .

La fonction $t \mapsto T_f(t_0, t)$, définie sur $I \setminus \{t_0\}$, est à valeurs dans \mathbb{R}^n . Posons $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$.

Alors, pour $t \in I \setminus \{t_0\}$: $T_f(t_0, t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right)$.

Autrement dit : $\forall t \in I \setminus \{t_0\} : T_f(t_0, t) = (T_{f_1}(t_0, t), T_{f_2}(t_0, t), \dots, T_{f_n}(t_0, t))$.

Les composantes de $T_f(t_0, t)$ sont donc les taux d'accroissement $T_{f_i}(t_0, t)$ des composantes f_i de f .

Définition 9.1.2 (développement limité d'ordre un en un point)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et soit t_0 un élément de I . On dit que f admet un développement limité d'ordre un au point t_0 s'il existe un vecteur ℓ et une fonction vectorielle $t \mapsto \varepsilon(t)$ tels que :

$\forall t \in I, f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + (t - t_0)\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = \vec{0}$.

Un tel développement limité, s'il existe, est unique.

Supposons en effet l'existence des vecteurs ℓ_1, ℓ_2 dans \mathbb{R}^n et des fonctions vectorielles $t \mapsto \varepsilon_1(t)$ et $t \mapsto \varepsilon_2(t)$ tels que : $\forall t \in I, \begin{cases} f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell_1 + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \\ f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell_2 + (t - t_0)\varepsilon_2(t) \end{cases}$, avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_2(t) = \vec{0}$.

Alors, pour tout $t \neq t_0$ de I , on trouve : $\ell_1 + \varepsilon_1(t) = \ell_2 + \varepsilon_2(t)$.

Il en résulte $\ell_1 = \ell_2$ quand $t \rightarrow t_0$ (puis finalement $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$ pour tout t). □

On note encore : $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + o(t - t_0)$ (attention, c'est un « petit o » vectoriel).

Si on pose $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$, il est clair qu'on a l'équivalence entre l'existence d'un développement limité pour f d'une part, et pour chacune de ses composantes f_i d'autre part :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + o(t - t_0) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i(t) = f_i(t_0) + (t - t_0)\ell_i + o(t - t_0))$$

En effet, notons $\begin{cases} f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \\ \varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \dots, \varepsilon_n(t)) \\ \ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \end{cases}$. Alors $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_i(t) = 0$.

Et enfin : $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + \varepsilon(t - t_0) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i(t) = f_i(t_0) + (t - t_0)\ell_i + \varepsilon_i(t - t_0))$ □

Par exemple : si $f(t) = \begin{pmatrix} \ln(1 - t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, le DL de f en 0 s'écrit $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t)$.

Proposition 9.1.1 (dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et soit t_0 un élément de I . Soit ℓ un vecteur de \mathbb{R}^n .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- la fonction $t \mapsto T_f(t_0, t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ est prolongeable par continuité par la valeur ℓ en t_0 .
- en t_0 , la fonction f admet le développement limité : $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + o(t - t_0)$

Si elles sont réunies, on dit que f est dérivable en t_0 et on note $f'(t_0) = \ell$ (vecteur dérivé de f en t_0).

Remarque évidente : si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en t_0 (ou plus généralement sur I) elle y est continue.

Proposition 9.1.2 (dérivabilité et fonctions composantes)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, soit t_0 un élément de I , et soit $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n .

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f est dérivable en t_0 , avec $f'(t_0) = \ell$
- les fonctions composantes f_i de f sont dérivables en t_0 , avec $f'_i(t_0) = \ell_i$

En cas de dérivabilité en t_0 , on pourra donc écrire : $f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.

Posons $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$.

On sait que : $\forall t \in I \setminus \{t_0\} : T_f(t_0, t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right)$.

Dans ces conditions : $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \ell_i$.

En d'autres termes : $f'(t_0) = \ell \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f'_i(t_0) = \ell_i$. □

Par exemple : si $f(t) = \begin{pmatrix} \ln(1-t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, alors, pour tout $t < 1$, on a $f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-t} \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

▷ Interprétation géométrique et cinématique

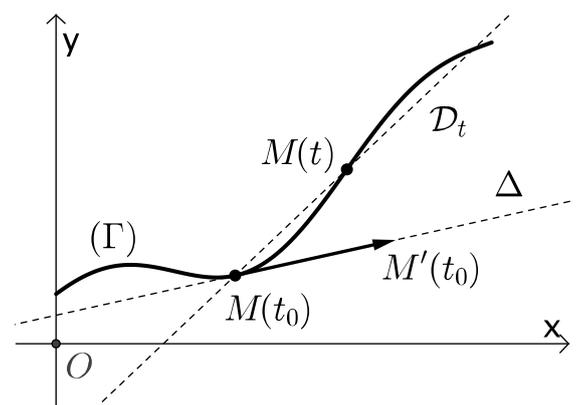
Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable en t_0 . On note indifféremment $f(t)$ ou $M(t)$.

Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, il existe un intervalle ouvert centré en t_0 et sur lequel $f(t) \neq f(t_0)$ si $t \neq t_0$.

Le vecteur $T_f(t_0, t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ dirige alors la « corde » \mathcal{D}_t passant par $M(t_0)$ et $M(t)$.

L'hypothèse $f'(t_0) \neq \vec{0}$ implique que, quand $t \rightarrow t_0$, la « limite » de la droite \mathcal{D}_t est la droite Δ (passant par M_0 , dirigée par $f'(t_0)$). Cette droite Δ est appelée *tangente* en $M(t_0)$ à la trajectoire $t \mapsto M(t)$.

Quant au vecteur $f'(t_0)$ (ou $M'(t_0)$), il représente le « vecteur vitesse » de $M(t)$ « à l'instant $t = t_0$ ».



Le cas $f'(t_0) = \vec{0}$ signifie que la vitesse de $M(t)$ s'annule à l'instant t_0 : cela ne veut pas dire pour autant que le point $M(t)$ s'arrête dans son mouvement (penser à un choc parfait, par exemple). Dans ce cas, il faut trouver autre chose pour diriger la tangente à la trajectoire en $M(t_0)$ (et par exemple le vecteur accélération $M''(t_0)$ dont on reparlera plus loin).

▷ Applications à valeurs matricielles

On peut identifier les espaces $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^{np} (par identification des bases canoniques).

Les fonctions $A: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont alors des cas particuliers d'applications vectorielles.

Une telle fonction $t \mapsto A(t)$ est caractérisée par ses np fonctions composantes : $\forall t \in I, [A(t)]_{i,j} = a_{i,j}(t)$.

Là encore, dire que la fonction A est dérivable en t_0 , c'est dire que ses composantes le sont.

Pour tous indices i, j , le coefficient d'indice i, j de la matrice $A'(t_0)$ est alors $a'_{i,j}(t_0)$.

Par exemple, si $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on a $R'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} = R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

Définition 9.1.3 (dérivabilité sur un intervalle)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

Cela permet de définir la fonction vectorielle dérivée $f': I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant est une généralisation évidente de la proposition 9.1.2

Proposition 9.1.3 (dérivabilité sur un intervalle et fonctions composantes)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Posons $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f est dérivable sur I .
- les fonctions composantes f_i de f sont dérivables sur I .

Dans ce cas, on a alors : $\forall t \in I, f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))$.

9.1.2 Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables

Les propositions suivantes sont exprimées en termes de fonctions vectorielles dérivables sur un intervalle, mais on peut bien sûr les écrire avec des hypothèses de dérivabilité en un point.

Proposition 9.1.4 (combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables)

Soit f et g définies sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n , toutes deux dérivables sur I .

Pour tous réels α, β , la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et on a : $h' = \alpha f' + \beta g'$.

Fixons t_0 dans I . Pour t dans $I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$T_h(t_0, t) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \alpha \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} + \beta \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \alpha T_f(t_0, t) + \beta T_g(t_0, t)$$

L'égalité $h'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$ en résulte quand $t \rightarrow t_0$, et ceci pour tout t_0 de I . □

Ce résultat s'étend à une combinaison linéaire quelconque de fonctions dérivables sur I .

L'ensemble des fonctions dérivables de I dans \mathbb{R}^n est donc muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Proposition 9.1.5 (dérivabilité de $f \circ \varphi$, où φ est réelle et f vectorielle)

Soit I, J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi(I) \subset J$.

Soit $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$. On peut donc définir la fonction vectorielle $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On suppose que φ est dérivable sur I , et que f est dérivable sur J .

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a l'égalité : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$

(Ici l'expression $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ est le produit de la fonction réelle φ' et de la fonction vectorielle $f' \circ \varphi$).

On fixe t_0 dans I . On a établi l'égalité $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0))$.

Pour $t \in I$, posons $\psi(t) = T_f(\varphi(t_0), \varphi(t)) = \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}$ si $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ et $\psi(t) = f'(\varphi(t_0))$ sinon.

Ainsi définie, l'application $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, notamment en t_0 (avec $\psi(t_0) = f'(\varphi(t_0))$).

Pour $t \neq t_0$, on a : $\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \psi(t)$ (dans les deux cas : $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ ou $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$).

Quand $t \rightarrow t_0$, on a alors par continuité : $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = \varphi'(t_0)\psi(t_0) = \varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0))$.

Autrement dit $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0))$, pour tout t_0 de I . □

Proposition 9.1.6 (dérivabilité de $L \circ f$, où f est vectorielle et où L est linéaire)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

On définit la fonction vectorielle $g = L \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}^p$ par : $\forall t \in I, g(t) = L(f(t))$.

Si f est dérivable sur I , alors g est dérivable sur I et on a l'égalité : $g' = L \circ f'$.

Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tout t de I , posons $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$.

Pour $t \in I$, on a $g(t) = L(f(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(t)L(e_i)$, et chacune des fonctions $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I .

Ainsi, par combinaison linéaire, $g = L \circ f$ est dérivable sur I et : $g'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(t)L(e_i) = L(f'(t))$. □

Par exemple si $t \mapsto A(t)$ est dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

– la fonction $t \mapsto \varphi(t) = \text{tr}(A(t))$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, \varphi'(t) = \text{tr}(A'(t))$;

on peut donc écrire, de façon plus concise : $(\text{tr}(A))' = \text{tr}(A')$

– la fonction $t \mapsto B(t) = A(t)^\top$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, B'(t) = (A'(t))^\top$, ou encore : $(A^\top)' = (A')^\top$

Proposition 9.1.7 (dérivabilité de $B(f, g)$, où f, g sont vectorielles et où B est bilinéaire)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.

On définit la fonction vectorielle $h = B(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}^q$ par : $\forall t \in I, h(t) = B(f(t), g(t))$.

Si f et g sont dérivables sur I , alors h est dérivable sur I et on a l'égalité : $h' = B(f', g) + B(f, g')$.

Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq p}$ les bases canoniques de \mathbb{R}^n et de \mathbb{R}^p .

Posons $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$ et $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j(t)\varepsilon_j$, donc $f'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(t)e_i$ et $g'(t) = \sum_{j=1}^p g'_j(t)\varepsilon_j$.

Par bilinéarité, et pour tout t de I , on a $h(t) = B(f(t), g(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i(t)g_j(t)B(e_i, \varepsilon_j)$.

Chacune des fonctions $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I .

Ainsi, par combinaison linéaire, $h = B(f, g)$ est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i(t)g_j(t))' B(e_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f'_i(t)g_j(t) + f_i(t)g'_j(t)) B(e_i, \varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f'_i(t)g_j(t) B(e_i, \varepsilon_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t)g'_j(t) B(e_i, \varepsilon_j) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)) \quad \square \end{aligned}$$

On va maintenant voir quatre illustrations usuelles de la proposition précédente.

▷ **Produit d'une fonction scalaire dérivable par une fonction vectorielle dérivable**

Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, toutes deux dérivables sur I .

Alors la fonction produit φf est dérivable sur I et $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.

▷ **Produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables**

On munit \mathbb{R}^n d'un produit scalaire (par exemple le produit scalaire canonique).

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, toutes deux dérivables sur I .

On définit l'application $\varphi = (f | g): I \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall t \in I, \varphi(t) = (f(t) | g(t))$.

Alors la fonction φ est dérivable sur I et on a : $\varphi' = (f' | g) + (f | g')$.

Cas particulier : si f ne s'annule pas sur I , alors $\|f\|$ est dérivable sur I et on a : $\|f\|' = \frac{(f' | f)}{\|f\|}$

▷ **Déterminant de deux fonctions dérivables de I dans \mathbb{R}^2**

On munit \mathbb{R}^2 d'une base \mathcal{B} quelconque .

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, toutes deux dérivables sur I .

On définit l'application $\varphi = \det_{\mathcal{B}}(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall t \in I, \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(f(t), g(t))$.

Alors la fonction φ est dérivable sur I et on a : $\varphi' = \det_{\mathcal{B}}(f', g) + \det_{\mathcal{B}}(f, g')$.

▷ **Produit vectoriel de deux fonctions dérivables de I dans \mathbb{R}^3**

On suppose ici que \mathbb{R}^3 est orienté (la base canonique est orthonormée directe).

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, toutes deux dérivables sur I .

On définit l'application $h = f \wedge g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ par : $\forall t \in I, \varphi(t) = f(t) \wedge g(t)$.

Alors la fonction h est dérivable sur I et on a : $h' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

▷ **Complément : dérivée de la composée par une fonction multilinéaire**

Ce qui a été dit sur la dérivée de $B(f, g)$, avec B bilinéaire, s'étend facilement.

Si f, g, h sont vectorielles dérivables et T est trilineaire, alors (avec des notations évidentes) la dérivée de la fonction $T(f, g, h)$ est la somme $T(f', g, h) + T(f, g', h) + T(f, g, h')$.

Par exemple, avec le produit mixte de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}^3$: $[f, g, h]' = [f', g, h] + [f, g', h] + [f, g, h']$.

Autre exemple, si $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si on note $B_i(t)$ la matrice obtenue en dérivant la i -ème colonne de $A(t)$ (et en conservant toutes les autres), alors $(\det A(t))' = \sum_{i=1}^n \det(B_i(t))$.

9.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

9.2.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Définition 9.2.1 (fonctions dérivées successives d'une fonction vectorielle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

On pose $f^{(0)} = f$. Soit k dans \mathbb{N} . Si $f^{(k)}$ est définie et dérivable sur I , on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Sous réserve de son existence, on dit que la fonction vectorielle $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k -ième de f .

Définition 9.2.2 (fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

Soit k dans \mathbb{N} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I si $f^{(k)}$ existe sur I et si elle y est continue.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si $f^{(k)}$ existe pour tout k de \mathbb{N} .

Proposition 9.2.1 (caractère \mathcal{C}^k et applications composantes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, et soit f_1, \dots, f_n ses applications composantes.

Soit k dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si les f_i sont elles-mêmes de classe \mathcal{C}^k .

On a alors, pour tout t de I : $f^{(k)}(t) = (f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), \dots, f_n^{(k)}(t))$.

Ainsi les composantes de la dérivée k -ième de f sont les dérivées k -ièmes des composantes de f .

| C'est une conséquence facile de la propriété 9.1.3, par récurrence sur l'entier k . □

Dans l'interprétation cinématique (c'est-à-dire si $f(t)$ désigne la position d'un point mobile $M(t)$ à l'instant t), le vecteur $f''(t)$ (ou encore $M''(t)$) est appelé *vecteur accélération* à l'instant t .

9.2.2 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Les propriétés déjà énoncées en termes de fonctions dérivables s'étendent aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Proposition 9.2.2 (combinaison linéaire de fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k)

Soit f et g définies sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n , toutes deux de classe \mathcal{C}^k sur I .

Pour tous réels α, β , la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a : $h^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$.

| C'est une conséquence facile de la proposition 9.1.4, par récurrence sur k . □

Ce résultat s'étend à une combinaison linéaire quelconque de fonctions vectorielles dérivables sur I . L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Proposition 9.2.3 (caractère \mathcal{C}^k de $L \circ f$, où f est vectorielle et où L est linéaire)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

On définit la fonction vectorielle $g = L \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ par : $\forall t \in I, g(t) = L(f(t))$.

Si f est de classe \mathcal{C}^k sur I , alors g est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a : $g^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.

| C'est une généralisation facile de la proposition 9.1.6, par récurrence sur k . □

Par exemple si $t \mapsto A(t)$ est de classe \mathcal{C}^k de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- la fonction $t \mapsto \text{tr}(A(t))$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a : $(\text{tr}(A))^{(k)} = \text{tr}(A^{(k)})$
- la fonction $t \mapsto A(t)^\top$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a : $(A^\top)^{(k)} = (A^{(k)})^\top$

Proposition 9.2.4 (caractère \mathcal{C}^k de $B(f, g)$, où f, g sont vectorielles et où B est bilinéaire)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.

On définit la fonction vectorielle $h = B(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}^q$ par : $\forall t \in I, h(t) = B(f(t), g(t))$.

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k sur I , alors h est de classe \mathcal{C}^k sur I .

On procède par récurrence sur l'entier k .

La propriété est vraie si $k = 0$: en effet, si f et g sont continues sur I , alors $B(f, g)$ est continue sur I (cette propriété relève du chapitre « Espaces vectoriels normés de dimension finie »).

On suppose que la propriété est vraie au rang k , avec k dans \mathbb{N} .

On se donne f et g de classe \mathcal{C}^{k+1} sur I . En particulier f et g sont dérivables. Il en résulte (cf prop.9.1.7) que $h = B(f, g)$ est dérivable sur I et que : $h' = B(f', g) + B(f, g')$.

Mais f, g, f', g' sont \mathcal{C}^k . Il en découle (par hypothèse de récurrence et somme) que h' est \mathcal{C}^k donc que $h = B(f, g)$ est \mathcal{C}^{k+1} . Cela prouve la propriété au rang $k + 1$ et achève la récurrence. □

Conséquence : si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^k et si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est \mathcal{C}^k , alors leur produit φf est \mathcal{C}^k .

Proposition 9.2.5 (caractère \mathcal{C}^k de $f \circ \varphi$, où φ est réelle et f vectorielle)

Soit I, J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi(I) \subset J$.

Soit $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$. On peut donc définir la fonction vectorielle $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si φ est de classe \mathcal{C}^k sur I , et si f est de classe \mathcal{C}^k sur J , alors $f \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

On procède par récurrence sur l'entier k .

La propriété est vraie si $k = 0$: en effet, si φ est continue sur I (à valeurs dans J) et si f est continue sur J (à valeurs dans \mathbb{R}^n), alors $f \circ \varphi$ est continue sur I (cette propriété de conservation de la continuité par composition relève du chapitre « Espaces vectoriels normés de dimension finie »).

On suppose que la propriété est vraie au rang k , avec k dans \mathbb{N} .

On se donne φ , de classe \mathcal{C}^{k+1} sur I (à valeurs dans J), et $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^{k+1} . En particulier f et φ sont dérivables. Il en résulte (cf prop. 9.1.5) que $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et que : $(f \circ \varphi)' = \varphi' (f' \circ \varphi)$.

Mais f', φ, φ' sont de classe \mathcal{C}^k . Il en découle (par hypothèse de récurrence et par produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle) que $(f \circ \varphi)'$ est de classe \mathcal{C}^k donc que $f \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^{k+1} . Cela prouve la propriété au rang $k + 1$ et achève la récurrence. □

Attention, le calcul des dérivées successives de $f \circ \varphi$ se complique assez vite !

Par exemple : $(f \circ \varphi)'' = (\varphi' \cdot (f' \circ \varphi))' = \varphi'' \cdot (f' \circ \varphi) + (\varphi')^2 \cdot (f'' \circ \varphi)$.

Avec l'interprétation cinématique, posons $M(t)$ plutôt que $f(t)$, et $N(t) = M(\varphi(t))$.

Si le point mobile $N(t)$ passe en A à l'instant t_0 , le point $M(t)$ y passe à l'instant $\varphi(t_0)$.

- d'une part $N'(t) = \varphi'(t) M'(\varphi(t))$ (les vecteurs vitesse au passage en A sont proportionnels)
- d'autre part $N''(t) = \varphi''(t) M'(\varphi(t)) + (\varphi')^2 M''(\varphi(t))$: le vecteur accélération du point mobile N lors de son passage en A est donc une combinaison linéaire des vecteurs vitesse et accélération du point mobile M lors de son passage en A .

Compléments

– Avec les notations ci-dessus, on a : $h^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(k-j)}, g^{(j)})$ (c'est la formule de Leibniz).

Cette formule se devine assez bien en partant de $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

En effet $B(f, g)'' = (B(f', g))' + (B(f, g'))' = B(f'', g) + 2B(f', g') + B(f, g'')$, et ainsi de suite.

– Cela s'applique notamment au cas du produit d'une fonction réelle φ par une fonction vectorielle f .

On a effet $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$, et $(\varphi f)'' = \varphi'' f + 2\varphi' f' + \varphi f''$, et ainsi de suite.

– On peut également appliquer cette idée au produit de deux fonctions matricielles.

Avec $A: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B: I \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on dispose en effet de la fonction $AB: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Alors : $(AB)' = A'B + AB'$ et $(AB)'' = A''B + 2A'B' + AB''$ etc. (conserver l'ordre des produits!).

Attention ! avec $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(A^2)' = A'A + AA'$ (qui ne vaut $2A'A$ que si A et A' commutent !)

9.3 Arcs paramétrés

9.3.1 Arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^k

Définition 9.3.1 (arc paramétré de classe \mathcal{C}^k)

On appelle *arc paramétré du plan* la donnée (I, f) d'un intervalle I et d'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

On définit de même la notion d'*arc paramétré de l'espace* \mathbb{R}^3 .

On dit que l'arc (I, f) est de classe \mathcal{C}^k si la fonction f est de classe \mathcal{C}^k sur I .

On utilise volontiers l'interprétation cinématique, qui conduit à noter $M(t)$ plutôt que $f(t)$, et à considérer que $M(t)$ est la position à l'instant t d'un point mobile M du plan ou de l'espace.

L'ensemble $f(I) = \{M(t), t \in I\}$ des positions $M(t)$ est appelé le *support* de l'arc paramétré (I, f) , ou encore la *trajectoire* ou le *lieu* des points $M(t)$ quand t décrit I .

Remarques

– On notera souvent $M(t) = (x(t), y(t))$, ou $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Se donner l'arc $t \mapsto M(t)$, c'est se donner les fonctions numériques $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$.

Cet arc est de classe \mathcal{C}^k si les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ sont de classe \mathcal{C}^k .

On notera alors, pour tout t de I : $M^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$, ou $M^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), z^{(k)}(t))$.

On dit que $M'(t)$ et $M''(t)$ sont le *vecteur vitesse* et le *vecteur accélération* à l'instant t .

Dans la suite, on considérera toujours des arcs de classe \mathcal{C}^k , avec k « suffisamment » grand.

– On ne confondra pas un arc paramétré (la donnée d'une fonction définie sur un intervalle I) avec le support (qui n'est que l'ensemble image de cette fonction).

Par exemple, les arcs paramétrés définis sur \mathbb{R} par $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $N(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ sont distincts, bien qu'ils aient le même support (le cercle de centre 0 et de rayon 1).

Pour autant, on dira souvent « tracer un arc » plutôt que « tracer le support d'un arc ».

Définition 9.3.2 (point régulier d'un arc paramétré)

Soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 1$.

Soit t_0 un élément de I . On dit que $M(t_0)$ est un *point régulier* de l'arc si $M'(t_0) \neq \vec{0}$.

Il s'agit là d'un abus de langage : ce qu'on appelle point régulier, c'est la position $M(t_0)$ du point M à l'instant t_0 ajoutée au fait que le vecteur vitesse $M'(t_0)$ à cet instant précis est non nul.

Complément de terminologie : si $M'(t_0) = \vec{0}$ (c'est-à-dire si le point $M(t_0)$ n'est pas régulier !) on parle de point *singulier*, ou encore *stationnaire*. Dans le cas d'un arc de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 2$, on dit que $M(t_0)$ est *birégulier* si les vecteurs $M'(t_0)$ et $M''(t_0)$ sont linéairement indépendants.

Définition 9.3.3 (tangente en un point régulier)

Soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 1$.

On suppose que $M(t_0)$ est un point régulier de cet arc.

La droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $M'(t_0)$ est appelée tangente à l'arc au point $M(t_0)$.

Il s'agit là aussi d'une commodité de vocabulaire, car on mélange des notions purement géométriques et des propriétés relatives à la dérivabilité de la fonction vectorielle $t \mapsto M(t)$.

On l'a vu, la tangente à l'arc au point $M(t_0)$ est la position limite, quand t tend vers t_0 , de la corde qui passe par le point fixe $M(t_0)$ et le point variable $M(t)$.

▷ **Équation de la tangente en un point régulier d'un arc du plan**

On note (X, Y) les coordonnées d'un point quelconque du plan, pour éviter toute ambiguïté de notation avec les coordonnées $x(t), y(t)$ du point courant $M(t)$ de l'arc paramétré étudié.

Soit $M(t_0)$ un point régulier de l'arc $t \mapsto M(t)$ du plan \mathbb{R}^2 .

L'équation de la tangente en $M(t_0)$ est $\begin{vmatrix} X - x(t_0) & x'(t_0) \\ Y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$, ou encore : $\begin{vmatrix} X & x(t_0) & x'(t_0) \\ Y & y(t_0) & y'(t_0) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

▷ **Normale à un arc en un point régulier d'un arc du plan**

Si \mathcal{T}_0 est la tangente à l'arc au point régulier $M(t_0)$, on peut également définir la « normale à l'arc » en $M(t_0)$, c'est-à-dire la perpendiculaire \mathcal{N}_0 au point $M(t_0)$ à la droite \mathcal{T}_0 .

Une équation de cette normale est $(X - x(t_0))x'(t_0) + (Y - y(t_0))y'(t_0) = 0$.

9.3.2 Longueur d'un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1

Dans les propositions suivantes, le plan \mathbb{R}^2 est muni de sa norme euclidienne.

Définition 9.3.4 (ligne polygonale inscrite dans un arc)

Soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré continu, défini sur un segment $[a, b]$.

On dit ici que les points $A = M(a)$ et $B = M(b)$ sont les *extrémités* de l'arc.

Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.

Les points $M(t_0) = A, M(t_1), \dots, M(t_{n-1}), M(t_n) = B$ forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc.

La quantité $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$ est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

Définition 9.3.5 (notion d'arc continu rectifiable)

Soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré continu, défini sur un segment $[a, b]$.

On dit que l'arc est *rectifiable* si les longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites sont majorées.

On appelle alors *longueur* de l'arc la quantité $L = \sup(L_\sigma)$.

Ici la borne supérieure est prise sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites.

Proposition 9.3.1 (longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^1)

Soit $t \mapsto M(t)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 , défini sur un segment $[a, b]$, avec $a \leq b$.

Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à : $L = \int_a^b \|M'(t)\| dt$.

Reprenons les notations de la définition 9.3.4.

Pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} M'(t) dt$, donc $\|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|M'(t)\| dt$.

Il en résulte : $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|M'(t)\| dt$, c'est-à-dire $L_\sigma \leq \int_a^b \|M'(t)\| dt$.

Ainsi $\int_a^b \|M'(t)\| dt$ majore la longueur de toute ligne polygonale inscrite dans l'arc $t \mapsto M(t)$.

Cela prouve que cet arc est rectifiable, et que sa longueur L vérifie $L \leq \int_a^b \|M'(t)\| dt$.

On admet qu'il y a égalité. □

Longueur de l'arc ou longueur du support ?

La notion de longueur est par nature géométrique, et cela peut créer des ambiguïtés liées à la différence qu'il convient de faire en l'arc lui-même (c'est-à-dire l'application $t \mapsto M(t)$) et le support de celui-ci.

Considérons l'exemple trivial de l'arc plan défini par $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $0 \leq t \leq 4\pi$.

Ici le support est le cercle unité, parcouru deux fois. Si on parle de longueur de l'arc, doit-on considérer celle du support (ici 2π) ou celle de la trajectoire suivie par le point $M(t)$ (ici 4π) ?

Quelques remarques

– le résultat précédent est facile à interpréter (même si ce n'est pas très rigoureux) en considérant que la longueur totale de l'arc est la « somme » de longueurs élémentaires $\|dM\|$, avec $\|dM\| = \|M'(t)\| dt$;

– la longueur de l'arc plan $t \in [a, b] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$.

– on considère l'arc de classe \mathcal{C}^1 défini par $y = f(x)$, avec $a \leq x \leq b$;

on a $M(x) = (x, f(x))$ donc $M'(x) = (1, f'(x))$: la longueur de l'arc est $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

Quelques exemples

– Considérons l'arc de chaînette $y = m \operatorname{ch}\left(\frac{x}{m}\right)$, avec $m > 0$, entre $x = a$ et $x = b$.

On a ici $M(x) = \left(x, m \operatorname{ch}\left(\frac{x}{m}\right)\right)$, donc $M'(x) = \left(1, \operatorname{sh}\left(\frac{x}{m}\right)\right)$ donc $\|M'(x)\| = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{m}\right)$.

On en déduit la longueur pour $a \leq x \leq b$: $L = \int_a^b \operatorname{ch}\left(\frac{x}{m}\right) dx = m \left(\operatorname{sh}\left(\frac{b}{m}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{a}{m}\right)\right)$.

– Considérons l'arc de cycloïde $\begin{cases} x(t) = R(t - \sin(t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$ (cf figure 9.3)

On a $M'(t) = R(1 - \cos(t), \sin(t))$ donc $\|M'(t)\| = R\sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2R\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

On en déduit $L = 4R \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8R$.

– Considérons l'astroïde $\begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases}$ (cf figure 9.4).

Pour avoir la longueur totale, on multiplie par 8 la longueur partielle obtenue pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

On trouve $M'(t) = 3a \sin(t) \cos(t) (-\cos(t), \sin(t))$ donc $\|M'(t)\| = \frac{3a}{2} \sin(2t)$.

Ainsi $L = 12a \int_0^{\pi/4} \sin(2t) dt = 6a \left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi/4} = 6a$.

– Considérons l'arc d'hélice circulaire $t \mapsto M(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

On a $M'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$ donc $\|M'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $L = \int_0^{2\pi} \|M'(t)\| dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

9.4 Construction d'arcs plans, avec des exemples

9.4.1 Étude d'un arc plan au voisinage d'un point

On va utiliser un développement limité pour décrire la forme d'un arc plan $t \mapsto M(t)$ au voisinage d'un point $M(t_0)$. Dans la pratique, on n'aura besoin d'utiliser cette méthode que si le point $M(t_0)$ n'est pas régulier, c'est-à-dire si le vecteur vitesse $M'(t_0)$ est nul.

▷ Utilisation d'un développement limité

On effectue un développement limité de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, en t_0 , à un ordre q « suffisant ».

Ces développements limités relèvent en théorie de la formule Taylor-Young (mais dans la pratique, ils sont obtenus par les opérations sur les développements limités usuels).

$$\begin{cases} x(t_0 + h) = x(t_0) + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_q h^q + o(h^q) \\ y(t_0 + h) = y(t_0) + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_q h^q + o(h^q) \end{cases}$$

On regroupe en un développement vectoriel : $M(t_0 + h) = M(t_0) + h\vec{U}_1 + h^2\vec{U}_2 + \dots + h^q\vec{U}_q + o(h^q)$ (*)

Dans cette notation, il faut comprendre $\vec{U}_k = (a_k, b_k)$.

On a $\begin{cases} a_1 = x'(t_0) \\ b_1 = y'(t_0) \end{cases}$ et aussi $a_2 = \frac{x''(t_0)}{2}$ et $b_2 = \frac{y''(t_0)}{2}$. On en déduit $U_1 = M'(t_0)$ et $U_2 = \frac{1}{2}M''(t_0)$.

▷ Notations importantes

- on note p le plus petit entier de \mathbb{N}^* tel que $\vec{U}_p \neq \vec{0}$ (et en particulier $p = 1$ si $M(t_0)$ est régulier) ;
- on note q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que \vec{U}_p et \vec{U}_q soient libres ;
- c'est la recherche de p et q qui détermine l'ordre auquel doit être poussé le développement (*).

Avec ces notations, le développement s'écrit $M(t_0 + h) = M(t_0) + h^p\vec{U}_p + \dots + h^q\vec{U}_q + o(h^q)$ (★')

Dans l'égalité (★'), les pointillés désignent des vecteurs colinéaires à \vec{U}_p .

▷ **Tangente au point** $M(t_0)$

Par définition, la tangente à l'arc en $M(t_0)$ est, si elle existe, la position limite (quand h tend vers 0) de la corde passant par $M(t_0)$ et $M(t_0 + h)$.

Une conséquence importante de l'égalité (\star') est que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \vec{U}_p$.

Mais $\frac{1}{h^p} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ est un vecteur directeur de la corde passant par $M(t_0)$ et $M(t_0 + h)$.

La tangente en $M(t_0)$ est donc la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $U_p = \frac{1}{p!} M^{(p)}(t_0)$.

Quand $p = 1$, on retrouve ce qu'on sait déjà : le vecteur $U_1 = M'(t_0) \neq 0$ dirige la tangente en $M(t_0)$.

Plus généralement, la tangente en un point $M(t_0)$ d'un arc plan est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul en ce point (mais on insiste sur le fait que le développement (\star') n'est en général pas obtenu par la formule de Taylor, mais plutôt par des opérations sur des développements limités usuels).

▷ **Allure de l'arc au voisinage de** $M(t_0)$

Plaçons-nous (avec les notations précédentes) dans le repère d'origine $M(t_0)$ et de base \vec{U}_p, \vec{U}_q .

Notons $X(t), Y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère.

Quand $h \rightarrow 0$ (donc quand $t \rightarrow t_0$), l'égalité (\star') donne $\begin{cases} X(t_0 + h) = h^p + o(h^p) \sim h^p \\ Y(t_0 + h) = h^q + o(h^q) \sim h^q \end{cases}$

Ce résultat permet, en fonction de la parité de p et q , et de la position de t par rapport à t_0 , de placer le point $M(t)$ dans les différents quadrants du repère $(M(t_0), \vec{U}_p, \vec{U}_q)$.

▷ **Les différents cas possibles**

On va maintenant voir les différents cas possibles.

Dans les schémas ci-dessous, on a représenté une portion du support de l'arc, au voisinage du point de paramètre t_0 . L'arc est « orienté » dans le sens des t croissants.

Dans chaque cas, on a représenté un tableau des signes de $X(t)$ et de $Y(t)$ au voisinage de $t = t_0$, ce qui permet de suivre les déplacements du point $M(t = t_0 + h)$ selon son appartenance aux différents quadrants du repère (M_0, X, Y) (on rappelle que le vecteur \vec{U}_p dirige l'axe M_0X , que le vecteur \vec{U}_q dirige l'axe M_0Y , et que l'axe M_0X est la tangente en M_0 à l'arc).

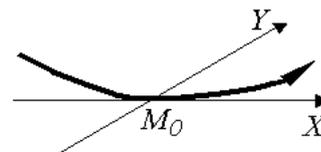
On classé les cas selon une sorte de « probabilité décroissante » (c'est subjectif, il faudrait prendre en compte la probabilité conditionnelle sachant que l'exercice est proposé par tel ou tel, ici ou là...)

p est impair et q est pair

On trouve le cas usuel $p = 1$ et $q = 2$, c'est-à-dire $OM'(t_0)$ et $OM''(t_0)$ libres.

Le vecteur $OM''(t_0)$ est alors dirigé dans la concavité de la courbe.

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	-	0	+
$Y(t)$	+	0	+



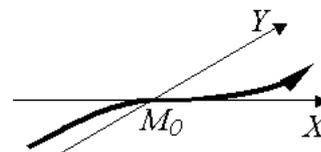
p est impair, et q est impair

Le cas usuel est $p = 1, q = 3$, donc $OM'(t_0) \neq \vec{0}$ et $OM''(t_0)$ lié à $OM'(t_0)$

La courbe « traverse » sa tangente.

M_0 est un point d'inflexion.

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	-	0	+
$Y(t)$	-	0	+

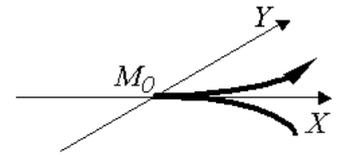


p est pair, et q est impair

Le plus souvent $p = 2$, $q = 3$.

On dit que le point M_0 est un *rebroussement de première espèce*

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	+	0	+
$Y(t)$	-	0	+

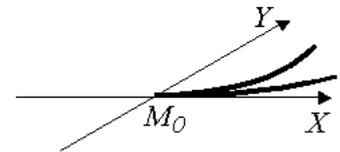


p est pair, et q est pair

Le plus souvent $p = 2$, $q = 4$.

On dit que le point M_0 est un *rebroussement de seconde espèce*.

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	+	0	+
$Y(t)$	+	0	+



Une étude supplémentaire distinguera les deux branches de l'arc.

On retiendra que le cas usuel est $p = 1$, $q = 2$, c'est-à-dire quand $OM'(t_0)$ et $OM''(t_0)$ sont libres : c'est ce qu'on appelle un point *birégulier*, même si le mot ne figure pas explicitement au programme. Rappelons que dans ce cas, le vecteur accélération $OM''(t_0)$ est dirigé dans la concavité de l'arc, ce qui semble logique si on considère le mouvement d'un point $M(t)$ de masse m provoqué par une force $\vec{F}(t)$ qui s'applique en $M(t)$, selon l'égalité : $\vec{F}(t) = m \overrightarrow{OM''}(t)$.

▷ Remarque sur les points d'inflexion

Avec les notations précédents, les points d'inflexion sont caractérisés par la condition « p, q impairs ».

En un tel point $M(t)$, les vecteurs $OM'(t)$ et $OM''(t)$ sont nécessairement liés.

Les inflexions sont les points où le déterminant $\Delta(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ s'annule en changeant de signe.

On trouve $\Delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -x'^2(t)m'(t)$, où on a posé $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Cette quantité $m(t)$ représente le coefficient directeur de la tangente à l'arc au point $M(t)$, du moins quand $x'(t) \neq 0$ (donc en un point régulier, et avec une tangente non verticale).

L'étude de $t \mapsto m(t)$ donne des indications intéressantes sur la façon dont varie le coefficient directeur de la tangente au point courant. En particulier, l'étude des extremums de $m(t)$ permet de déterminer (si nécessaire) les éventuels points d'inflexions de l'arc.

9.4.2 Étude d'un arc plan au voisinage d'une branche infinie

On considère un arc $t \mapsto M(t)$ de \mathbb{R}^2 .

On se place au voisinage d'un point t_0 adhérent à I (éventuellement $t_0 = \pm\infty$).

On dit que l'arc $t \mapsto M(t)$ présente une *branche infinie* au voisinage de t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|M(t)\| = +\infty$.

▷ Asymptotes horizontales ou verticales

Les cas suivants sont assez faciles à étudier :

- si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$, on est en présence de l'*asymptote horizontale* $y = y_0$;
le placement (au-dessus ou en-dessous) par rapport à cette asymptote dépend du signe de $y(t) - y_0$.
- si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$, on est en présence de l'*asymptote verticale* $x = x_0$;
le placement (à gauche ou à droite) par rapport à cette asymptote dépend du signe de $x(t) - x_0$.

▷ Branches paraboliques, asymptotes obliques

On se place ici dans le cas où on a à la fois $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$.

Si de plus $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$, on dit que l'arc présente (quand $t \rightarrow t_0$) :

- une *branche parabolique* dans la direction Oy si $a = \pm\infty$;
- une *branche parabolique* dans la direction Ox si $a = 0$;
- la *direction asymptotique* $y = ax$ si a est un réel non nul (\star)

Dans le cas particulier (\star) d'une direction asymptotique $y = ax$ quand t tend vers t_0 :

- si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = \pm\infty$, on parle de *branche parabolique* dans la direction $y = ax$;
- si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$, on dit que la droite $y = ax + b$ est *asymptote* à la courbe ;

la quantité $y(t) - ax(t) - b$ donne alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote : si cette quantité est positive (resp. négative) quand $t \rightarrow t_0$, alors la courbe est (localement, quand $t \rightarrow t_0$) « au-dessus » (resp. « en dessous ») de l'asymptote d'équation $y = ax + b$.

▷ Utilisation de développements asymptotiques

Plaçons-nous dans le cas où $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$, avec t_0 dans \mathbb{R} .

On effectue un développement asymptotique de $x(t_0 + h)$ et $y(t_0 + h)$ au voisinage de $h = 0$.

Ces deux développements contiennent des puissances négatives de h .

Par combinaison linéaire, on en déduit un développement de $ax(t_0 + h) + by(t_0 + h)$ en $h = 0$.

L'idée est de choisir a et b pour y éliminer (si possible) les puissances négatives de h .

Si tout va bien, on a alors obtenu : $ax(t_0 + h) + by(t_0 + h) = \alpha + \beta h + o(h)$.

Ainsi $\lim_{t \rightarrow t_0} (ax(t) + by(t) - \alpha) = 0$, ce qui traduit l'existence de l'asymptote oblique $aX + bY - \alpha = 0$.

L'étude du signe de $ax(t) + by(t) - \alpha$ permet alors de préciser la position (au voisinage de $t = t_0$) de la courbe par rapport à cette asymptote (cela dépend du signe de β : si ce coefficient est nul, il faut pousser un peu plus loin les développements asymptotiques de $x(t)$ et de $y(t)$).

▷ Un exemple d'étude d'asymptote

L'arc plan défini par $x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$ et $y(t) = \frac{t^2}{t - 1}$ présente une branche infinie quand t tend vers 1.

Plus précisément : $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty$.

– *Sans utilisation de développement asymptotique* :

Quand t tend vers 1, $\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1)$ tend vers 2. Il y a donc la direction asymptotique $y = 2x$.

D'autre part, $y(t) - 2x(t) = \frac{t^3 + t^2 - 2t}{t^2 - 1} = \frac{t(t+2)}{t+1}$ tend vers $\frac{3}{2}$ quand t tend vers 1.

Enfin $y(t) - 2x(t) - \frac{3}{2} = \frac{2t^2 + t - 3}{2(t+1)} = \frac{(t-1)(2t+3)}{2(t+1)} \sim \frac{5}{4}(t-1)$ quand $t \rightarrow 1$.

– Avec utilisation de développement asymptotique :

On aurait également pu procéder de la manière suivante, en posant $t = 1 + h$.

$$\text{D'une part : } x(t) = \frac{1+h}{h(2+h)} = \frac{1}{2h}(1+h)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right) = \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} - \frac{h}{8} + o(h).$$

$$\text{D'autre part : } y(t) = \frac{(1+h)^2}{h} = \frac{1}{h} + 2 + h.$$

$$\text{On en déduit } y(t) - 2x(t) = \frac{3}{2} + \frac{5h}{4} + o(h).$$

$$\text{On retrouve donc l'équation } y = 2x + \frac{3}{2}.$$

Le placement donné par le signe de $h = t - 1$.

Par rapport à son asymptote, la courbe est « au-dessus » quand $t \rightarrow 1^+$, et « en-dessous » quand $t \rightarrow 1^-$.

Voici l'allure de la courbe au voisinage de $t = 1$.

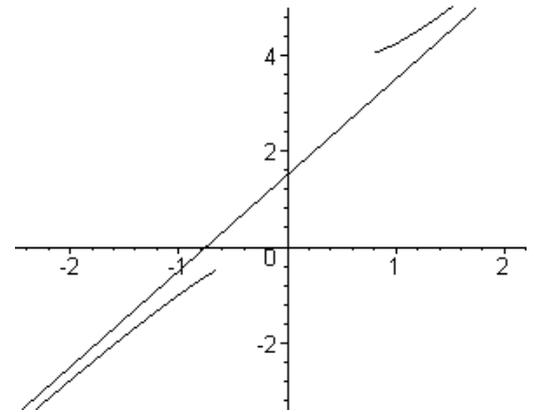


fig. 9.1 – Une asymptote

9.4.3 Étude globale d'un arc plan

Dans cette section, on voit comment procéder à l'étude complète d'un arc $t \mapsto M(t)$ du plan, l'objectif final étant bien sûr le tracé (soigné) du support de cet arc.

Jusqu'à présent, on a surtout privilégié les études locales (ce qui se passe au voisinage d'un point). On va maintenant adopter un point de vue plus global.

L'étude se déroule en plusieurs étapes. L'ordre indiqué ci-dessous est conseillé.

▷ Domaine de définition, et degré de régularité de l'arc

On commence par préciser le domaine de définition \mathcal{D} de la fonction $t \mapsto M(t)$ (un intervalle ou une réunion d'intervalles), et on indique l'ordre de dérivabilité.

▷ Réduction éventuelle du domaine d'étude par périodicité

Si les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont T -périodiques, alors on peut limiter le domaine d'étude à un intervalle de longueur T . L'arc est alors parcouru tout entier sur cet intervalle.

Une courbe de Lissajous :

Considérons par exemple l'arc défini par
$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto x(t)$ est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique.

Quant à la fonction $t \mapsto y(t)$, elle est π -périodique.

Ainsi la fonction $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est 2π -périodique.

On obtient donc toute la courbe avec $-\pi \leq t \leq \pi$.

Voici l'allure de l'arc : il s'agit d'une *courbe de Lissajous*.

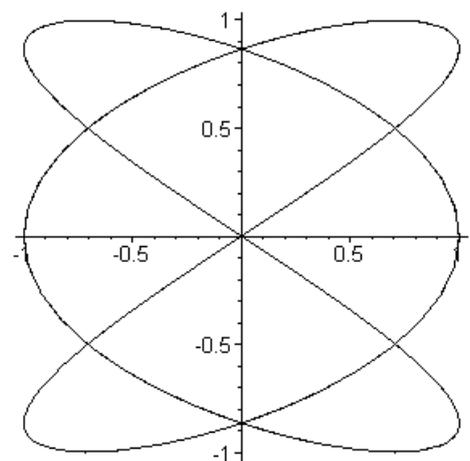


fig. 9.2 – Courbe de Lissajous

Sans que la fonction $t \mapsto M(t)$ soit T -périodique, il arrive que $M(t + T)$ dépende de $M(t)$ par une transformation géométrique simple. Il suffit alors d'étudier l'arc sur $[t_0, t_0 + T]$, puis d'appliquer cette transformation géométrique (éventuellement de façon répétée) pour obtenir toute la courbe.

L'exemple de l'astroïde :

Considérons l'arc défini par $x(t) = R(t - \sin(t))$ et $y(t) = R(1 - \cos(t))$.

Pour tout réel t , on constate que $M(t + 2\pi) = M(t) + 2\pi R(1, 0)$.

Ainsi le point $M(t + 2\pi)$ se déduit de $M(t)$ par la translation de vecteur $2\pi R \vec{i}$.

Il suffit donc d'étudier l'arc sur $[-\pi, \pi]$, puis de compléter par des translations de vecteur $2k\pi R \vec{i}$.

Le résultat est bien connu, c'est une cycloïde :

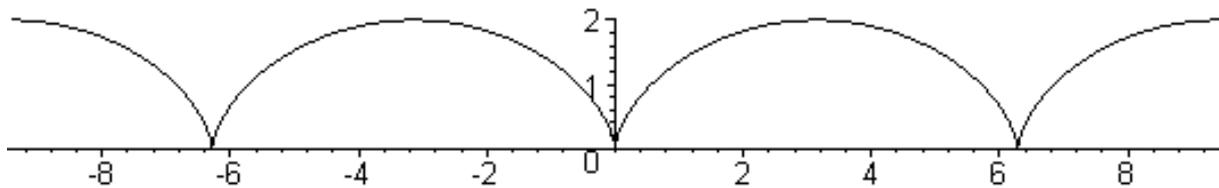


fig. 9.3 – La cycloïde

▷ Réduction éventuelle du domaine d'étude par symétrie

Rappelons que la symétrie d'axe la droite $x = a$ est donnée par le système $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$

De même, la symétrie d'axe $y = b$ est donnée par $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Enfin la symétrie ponctuelle de centre (a, b) est donné par le système $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Pour l'arc $t \mapsto M(t)$ défini sur I , on suppose que les conditions suivantes sont réunies :

- l'intervalle I est partitionné en $I = J \cup K$.
- il existe une fonction $t \mapsto t' = \varphi(t)$ telle que, si t parcourt J alors t' parcourt K .
- il existe une même symétrie reliant $M(t)$ et $M(t')$ pour tout t de J .

Dans ces conditions, on étudie l'arc sur le sous-intervalle J , et on applique la symétrie à la portion de courbe obtenue, ce qui donne le support de l'arc sur l'intervalle I tout entier.

La fonction $t \mapsto t' = \varphi(t)$ est très souvent l'une des fonctions suivantes :

- la fonction $t \mapsto -t$ (notamment quand $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont paires ou impaires); cela permet de réduire l'étude de l'arc aux valeurs $t \geq 0$.
- une des fonctions $t \mapsto t' = a + b - t$ ou $t \mapsto t' = \frac{a+b}{2} + t$ quand $I = [a, b]$; cela permet de réduire l'étude de l'arc à une moitié de l'intervalle I .

L'exemple de l'astroïde : considérons l'arc $\begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases}$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont 2π -périodiques.

Il en est donc de même de $t \mapsto M(t)$, et on obtient toute la courbe sur un intervalle $[t_0, t_0 + 2\pi]$.

On a $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à Ox .

On se limite donc à $[0, \pi]$, sachant qu'il faudra ensuite compléter par la symétrie par rapport à Ox .

On remarque que $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$

Ainsi $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à Oy .

On peut donc se limiter à $[0, \pi/2]$, sachant qu'il faudra ensuite compléter par la symétrie par rapport à Oy .

On remarque également que $\begin{cases} x(\pi/2 - t) = y(t) \\ y(\pi/2 - t) = x(t) \end{cases}$

Ainsi $M(t)$ et $M(\pi/2 - t)$ sont symétriques par rapport à $y = x$.

On peut donc se limiter à $[0, \pi/4]$, sachant qu'il faudra ensuite compléter par la symétrie par rapport à $y = x$.

On a représenté l'arc (avec ici $a = 1$) : c'est une *astroïde*.

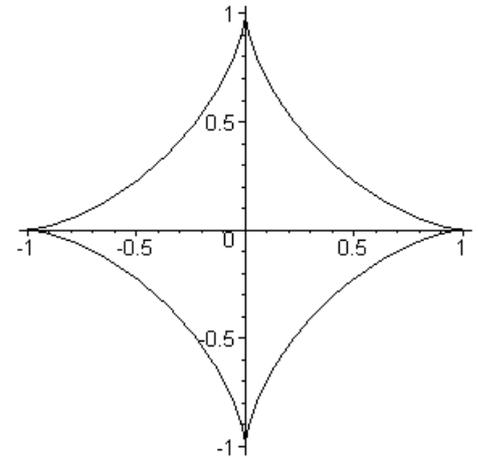


fig. 9.4 – L'astroïde

L'exemple du folium de Descartes :

Parfois la réduction du domaine d'étude n'est pas évidente.

Considérons l'arc défini pour $t \neq -1$ par $x(t) = \frac{t}{t^3 + 1}$ et $y(t) = \frac{t^2}{t^3 + 1}$.

On constate que $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$.

Ainsi $M(t)$ et $M\left(t' = \frac{1}{t}\right)$ sont symétriques par rapport à $y = x$.

Il suffit donc d'étudier l'arc pour $t \in J =]-1, 1]$, sachant qu'il faudra ensuite compléter par cette symétrie.

En effet quand t parcourt J , le réel t' parcourt $] -\infty, -1[\cup]1, \infty[$.

On a représenté l'arc : c'est un *folium de Descartes*.

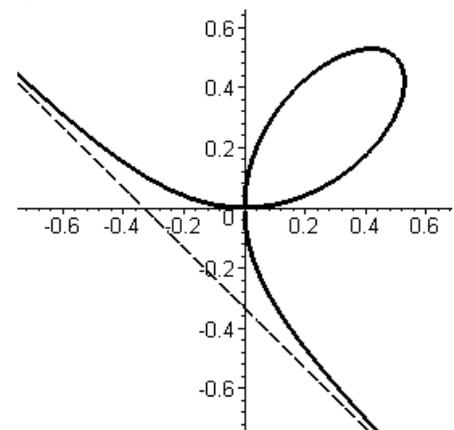


fig. 9.5 – Le folium de Descartes

▷ Étude des variations de $t \mapsto M(t)$

On forme le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

On complète par les limites de $x(t)$ et $y(t)$ aux bornes du domaine.

Le fait de placer les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ sur deux lignes contiguës permet mieux de suivre les déplacements du point $M(t)$.

Rappelons que $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ est le coefficient directeur de la tangente en $M(t)$.

La ligne $m(t)$ (facultative) indiquera des valeurs utiles de ce coefficient directeur.

t	...
$x'(t)$...
$x(t)$...
$y(t)$...
$y'(t)$...
$m(t)$...

Le tableau de variations peut faire apparaître des situations particulières, qu'il faut étudier rapidement, en représentant l'allure de la courbe au voisinage du point considéré :

– asymptotes verticales, quand $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$;

l'allure est donnée par le signe de $y(t)$ et par le placement de $x(t)$ par rapport à x_0 ;

- asymptotes horizontales, quand $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$;
l'allure est donnée par le signe de $x(t)$ et par le placement de $y(t)$ par rapport à y_0 ;
- tangentes verticales, quand $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$;
tangentes horizontales, quand $y'(t_0) = 0$ et $x'(t_0) \neq 0$;
dans ces deux cas, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de $t = t_0$ précisent l'allure locale.
- intersections avec l'axe $x'Ox$ quand $y(t)$ s'annule, et avec l'axe $y'Oy$ quand $x(t)$ s'annule ;
on précise si possible la valeur de $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ en ces points ;
- points non réguliers (ou encore « stationnaires ») quand $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$;
on étudie ces points (rebroussements de première espèce ? de seconde espèce ?), notamment avec un développement limité, et on représente l'allure de la courbe au voisinage du point étudié.
- branches infinies, quand $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$; on les étudie, notamment avec un développement asymptotique, et on représente l'allure de la courbe au voisinage du point étudié.

Les symétries au secours des points stationnaires

L'étude d'un point stationnaire est parfois facilitée par des considérations de symétrie.

Revenons par exemple à l'astroïde $x(t) = a \cos^3(t)$, $y(t) = a \sin^3(t)$.

$$\text{On a } x(0) = a, y(0) = 0, \text{ et : } \frac{y(t)}{x(t) - a} = \frac{\sin^3 t}{1 - \cos^3 t} \sim \frac{\sin^3 t}{3(1 - \cos t)} \sim \frac{2t}{3}.$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t) - a} = 0$, ce qui prouve qu'il y a une tangente horizontale en $(a, 0)$.

Sachant que $x'Ox$ est axe de symétrie, cela signifie qu'il y a en ce point un rebroussement de première espèce : il est donc inutile d'effectuer un développement limité en ce point.

Toujours pour notre astroïde, on peut aussi remarquer que : $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t$.

La tangente en tout point $M(t)$, avec $x'(t) \neq 0$, a donc un coefficient directeur égal à $-\tan t$.

Par passage à la limite, on retrouve la tangente horizontale au point $M(0) = (a, 0)$.

▷ Points doubles éventuels

On procède (au brouillon, ou avec sa calculatrice) à un tracé sommaire de la courbe.

Celui-ci peut faire apparaître un « point double ».

Sa détermination (si elle possible) peut ajouter à la précision générale du tracé.

On recherche un *point double* en résolvant $\begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$ avec $t_0 \neq t_1$.

Ce système est symétrique en t_0, t_1 , et il admet la solution évidente (mais à rejeter) $t_0 = t_1$.

En général (notamment quand $x(t)$ et $y(t)$ sont des fractions rationnelles), on peut factoriser $(t_1 - t_0)$ dans les deux égalités de ce système.

Après simplification par $(t_1 - t_0)$, et compte tenu du caractère symétrique du problème, on obtient un système par rapport à $p = t_0 t_1$ et $s = t_0 + t_1$, et qui permet de trouver la ou les paires solutions $\{t_0, t_1\}$ et donc le ou les points doubles.

Un exemple d'étude de point double

On considère l'arc défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$ et $y(t) = \frac{t^2}{t - 1}$.

On va montrer que cet arc présente un point double.

On doit donc trouver deux réels t_0 et t_1 distincts tels que $M(t_0) = M(t_1)$.

$$M(t_0) = M(t_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0(t_1^2 - 1) = t_1(t_0^2 - 1) \\ t_0^2(t_1 - 1) = t_1^2(t_0 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 - t_0)(t_0 t_1 + 1) = 0 \\ (t_1 - t_0)(t_0 + t_1 - t_0 t_1) = 0 \end{cases}$$

Or $t_0 \neq t_1$, ce qui donne $\begin{cases} t_0 + t_1 = -1 \\ t_0 t_1 = -1 \end{cases}$

Les réels t_0, t_1 sont donc les racines de l'équation $t^2 + t - 1 = 0$.

Ainsi $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Pour ces deux valeurs de t , on a $x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} = -1$ et $y(t) = \frac{t^2}{t - 1} = -1$.

On constate donc que $A = (-1, -1)$ est point double, pour $t_0 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

En tout point $M(t)$ de l'arc, la tangente a pour coefficient directeur $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t(2-t)(t+1)^2}{t^2+1}$.

Mais pour $t = t_0$ et $t = t_1$, on peut simplifier $m(t)$ en utilisant $t^2 = 1 - t$ donc $t^2 + 1 = 2 - t$.

On trouve :

$$\begin{aligned} m(t) &= t(t+1)^2 = t(t^2 + 2t + 1) \\ &= t(2+t) = 2t + t^2 = 1 + t \end{aligned}$$

On constate donc que :

$$\begin{aligned} m(t_0)m(t_1) &= (1+t_0)(1+t_1) \\ &= t_0 t_1 + (t_0 + t_1) + 1 = -1 \end{aligned}$$

Ainsi les deux tangentes en $A(-1, -1)$ sont orthogonales.

On a représenté ici l'allure de l'arc au voisinage du point double.

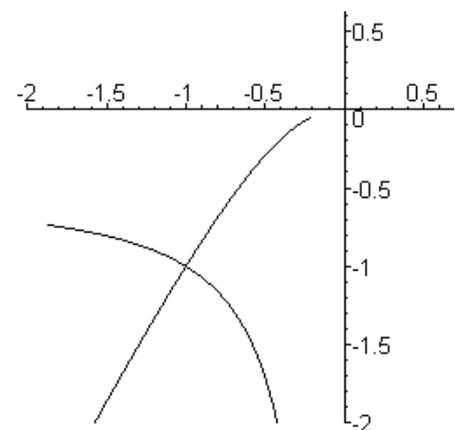


fig. 9.6 – Un point double

▷ Points d'inflexion éventuels

Il s'obtiennent en cherchant quand $\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ s'annule en changeant de signe.

On peut également chercher les extrémums de $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (qui se simplifie parfois).

▷ Tracé définitif

Toute l'étude de l'arc trouve son aboutissement dans le tracé final, qui doit être soigné.

On commencera par placer les différents éléments sur lesquels « repose » la courbe (tangentes horizontales ou verticales, asymptotes, points non réguliers, intersections avec les axes).

Il n'est pas nécessaire (au contraire) de faire figurer les autres points intermédiaires (et n'ayant aucune propriété particulière) ayant servi au tracé.

9.4.4 Une étude complète : le bicorne

On se propose de tracer l'arc plan défini par : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \frac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)}$

L'arc est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et il est 2π -périodique.

On peut donc limiter l'étude à un intervalle $[-\pi, \pi]$ et toute la courbe est obtenue.

On a $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ donc $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à Oy .

On se limite donc à $[0, \pi]$, sachant qu'il faudra ensuite compléter par la symétrie par rapport à Oy .

On a $x'(t) = \cos(t)$ et $y'(t) = \frac{-2 \cos(t) \sin(t)(2 - \cos(t)) - \cos^2(t) \sin(t)}{(2 - \cos(t))^2} = -\sin(t) \cos(t) \frac{4 - \cos(t)}{(2 - \cos(t))^2}$

On en déduit que $t \mapsto x(t)$ est strictement

croissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, décroissante de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sur $[0, 1]$

De même la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement

décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, croissante de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

On a représenté ici le tableau des variations des fonctions x et y .

Il y a une tangente horizontale en $M(0) = (0, 1)$ et en $M(\pi) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$	0	↗ 1 ↘	0
$y(t)$	1	↘ 0 ↗	$\frac{1}{3}$
$y'(t)$	0	-	0
		+	0

Le point stationnaire :

On étudie le point stationnaire, obtenu pour $t = \frac{\pi}{2}$.

On trouve : $x\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

De même : $y\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{\sin^2(h)}{2 + \sin(h)} = \frac{(h + o(h^2))^2}{2 + h + o(h)} = \frac{1}{2}h^2(1 + o(h))\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{4} + o(h^3)$

Ainsi $M\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) + h^2U_2 + h^3U_3 + \vec{o}(h^3)$, avec $U_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs U_2 et U_3 sont libres donc $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

La tangente, dirigée par U_2 donc par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour équation $Y = 1 - X$.

Le point d'inflexion :

Un tracé rapide fait apparaître un point d'inflexion $I = M(t_0)$ pour un certain t_0 de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour simplifier les notations, on va poser $S = \sin(t)$ et $C = \cos(t)$.

Toutes les dérivations se font par rapport à la variable t .

On a bien sûr $x' = C$ et $y'(t) = SC \frac{C - 4}{(C - 2)^2}$ donc $m'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(C - 4)S}{(C - 2)^2}$.

On en déduit : $m'(t) = \frac{-S^2 + (C - 4)C}{(C - 2)^2} + \frac{2(C - 4)S^2}{(C - 2)^3} = \frac{2C^2 - 4C - 1}{(C - 2)^2} - \frac{2(C - 4)(C^2 - 1)}{(C - 2)^3}$.

$$\text{Ainsi : } m'(t) = \frac{(2C^2 - 4C - 1)(C - 2) - 2(C - 4)(C^2 - 1)}{(C - 2)^3} = \frac{3(3C - 2)}{(C - 2)^3} \quad (\text{miracle!})$$

La fonction $t \mapsto m(t)$ passe par un extremum quand $C = \frac{2}{3}$, c'est-à-dire $t = t_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

$$\text{On a alors } x(t_0) = \sin(t_0) = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ et } y(t_0) = \frac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} = \frac{1}{3}.$$

La tangente en $M(t_0)$ est dirigée par $M'(t_0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5\sqrt{5}}{12}\right)$ (la pente est $m'(t_0) = -\frac{5\sqrt{5}}{8} \approx -1.4$).

On trace la courbe représentative avec Python :

```
from pylab import *
t = np.linspace(0,2*pi,100)
x = sin(t)
y = cos(t)**2/(2-cos(t))
show(plot(x,y))
```

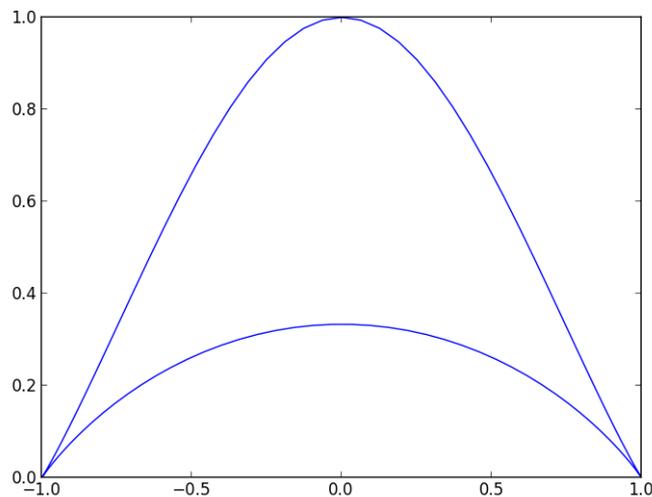


fig. 9.7 – Le bicolore