Chapitre 4

Techniques d'analyse (dérivation)

Sommaire

4.1 Propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

4.1.1 Existence d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$

Proposition 4.1.1 (propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)
L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$, et vérifiant les propriétés :
- *ordre total : pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.*
- *compatibilité avec l'addition : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$.*
- *compatibilité avec le produit par un réel positif : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z) \Rightarrow xz \leqslant yz$.*

Relation d'ordre contraire, inégalités strictes

- On a bien sûr la relation d'ordre contraire de la précédente, définie par $x \geqslant y$ (qui équivaut à $y \leqslant x$).
  On utilise plus souvent $\leqslant$ que $\geqslant$ dans les calculs, mais essentiellement $\leqslant$ dans les définitions et propriétés (sachant qu'à toute propriété relative à $\leqslant$ correspondant une propriété relative à $\geqslant$).
- On définit les inégalités strictes : $\begin{cases} x < y & \text{équivaut à} \quad (x \leqslant y \text{ et } x \neq y) \\ x > y & \text{équivaut à} \quad y < x \end{cases}$
  On rappelle que les relations $<$ et $>$ ne définissent pas à proprement parler des relations d'ordre, car elles ne sont pas *réflexives* : on n'a en effet pas l'inégalité $x < x$.

Cas des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

On peut *restreindre* la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ à chacun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Q}$ (et considérer alors qu'il s'agit d'une relation d'ordre total sur chacun de ces trois ensembles).
Pour ce qui est de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, on dispose de propriétés importantes :
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un élément minimum (en particulier 0 est le minimum de $\mathbb{N}$).
- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un élément minimum.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, ou de $\mathbb{Z}$, possède un élément maximum.
- Si x et y sont dans $\mathbb{Z}$, on a l'équivalence : $x \leqslant y \ \Leftrightarrow\ (\exists n \in \mathbb{N},\ y = x+n)$.

Les propriétés précédentes sont fausses pour l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Définition 4.1.1 (notations $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$ etc.)
On pose $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et $\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{+*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$.
On définit de même les ensembles $\mathbb{Z}^{+*}$, $\mathbb{Z}^{+}$, $\mathbb{Q}^{+*}$, et $\mathbb{Q}^{+}$.
On pose $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$ et $\mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0\}$.
On définit de même les ensembles $\mathbb{Z}^{-*}$, $\mathbb{Z}^{-}$, $\mathbb{Q}^{-*}$, et $\mathbb{Q}^{-}$.

Ne pas généraliser aux nombres complexes !

Soit x un réel : si $x \geqslant 0$ alors $x^2 \geqslant 0$ (comptabilité pour le produit par un réel positif).
Mais si $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$ et là encore on a $(-x)^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x^2 \geqslant 0$.
Retenons donc que pour tout x réel, on a $x^2 \geqslant 0$ (et bien sûr $x^2 > 0$ pour tout réel x non nul).

De cette remarque très simple, il découle qu'il n'existe pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ qui puisse étendre celle de $\mathbb{R}$ (en gardant notamment la comptabilité pour le produit par un nombre positif). En effet, si tel était le cas, on trouverait $i^2 > 0$, c'est-à-dire $-1 > 0$.

Il existe des relations d'ordre total sur $\mathbb{C}$, mais qui ne généralisent pas les propriétés de celle de $\mathbb{R}$.

Pour éviter les ennuis, on évitera donc d'écrire $z \leqslant z'$, quand z et z' sont dans $\mathbb{C}$.

4.1.2 Relation d'ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Signe de la somme, du produit

Le tableau ci-après résume les *règles des signes*, c'est-à-dire ce qu'on peut affirmer sur $x+y$ ou sur xy quand on connait la position de x et de y par rapport à 0 (les points d'interrogation signifient qu'il n'y a pas de réponse générale dans tel ou tel cas).

x	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
y	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$	> 0	< 0	< 0	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$
$x+y$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	?	> 0	< 0	?	> 0	?	?	< 0
xy	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	> 0	> 0	< 0	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$

On démontre également les équivalences suivantes, valables pour tous réels x, y, z :

$$\begin{cases} x+z \leqslant y+z \iff x \leqslant y \\ x \leqslant y \iff -y \leqslant -x \\ x \leqslant 0 \iff -x \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+z < y+z \iff x < y \\ x < y \iff -y < -x \\ x < 0 \iff -x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x \leqslant y \text{ et } z \leqslant 0) \Rightarrow xz \geqslant yz \\ (x < y \text{ et } z > 0) \Rightarrow xz < yz \\ (x < y \text{ et } z < 0) \Rightarrow xz > yz \end{cases}$$

Relation d'ordre et passage à l'inverse

Pour tout réel x non nul, on a les équivalences évidentes : $x > 0 \iff \dfrac{1}{x} > 0$, et $x < 0 \iff \dfrac{1}{x} < 0$
Pour tout réel x non nul, on a aussi les équivalences suivantes :

$x > 1 \iff 0 < \dfrac{1}{x} < 1$	$x < -1 \iff -1 < \dfrac{1}{x} < 0$	$0 < x < 1 \iff \dfrac{1}{x} > 1$	$-1 < x < 0 \iff \dfrac{1}{x} < -1$

Plus généralement, pour tous réels x et y, on a :

$0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$	$x < y < 0 \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 0$	$x < 0 < y \iff \dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$

4.1.3 Valeur absolue, inégalité triangulaire

Définition 4.1.2
Pour tout réel x, on pose $|x| = \max(-x, x)$. Cette quantité est appelée *valeur absolue* de x.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

– Pour tout réel x : $\begin{cases} |x| \geqslant 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ |x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0, \quad |x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0 \end{cases}$

– Plus généralement, pour tout réel x, et pour tout réel positif ou nul α :
$|x| = \alpha \Leftrightarrow x \in \{-\alpha, \alpha\}$, $\begin{cases} |x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ |x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} |x| \geqslant \alpha \Leftrightarrow (x \leqslant -\alpha \text{ ou } x \geqslant \alpha) \\ |x| > \alpha \Leftrightarrow (x < -\alpha \text{ ou } x > \alpha) \end{cases}$

– Pour tous réels x et y : $\begin{cases} x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \\ x^2 \leqslant y^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant |y| \end{cases}$ $|xy| = |x|\,|y|$ (et $|x^n| = |x|^n$ pour tout entier n)

– Pour tous réels x et y, on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

Proposition 4.1.2 (inégalité triangulaire)
Pour tous réels x et y, on a : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
On a l'égalité $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y ont le même signe.

Proposition 4.1.3 (valeur absolue d'une somme, ou d'un produit, de n nombres réels)
Pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a : $\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k|$ et $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
On a l'égalité $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ si et seulement si tous les x_k ont le même signe.

Définition 4.1.3
Pour tout réel x, on note $\begin{cases} x^+ = \max(x, 0) \\ x^- = \max(-x, 0) \end{cases}$ Ainsi : $x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On dit que x^+ (resp. x^-) est la partie positive (resp. négative) du réel x.

Avec ces notations, pour tout réel x : $\begin{cases} x^+ \geqslant 0 \\ x^- \geqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{cases}$ $\begin{cases} x^+ = (x + |x|)/2 \\ x^- = (|x| - x)/2 \end{cases}$

Définition 4.1.4
Pour tous réels x, y, la quantité $d(x, y) = |y - x|$ est appelée *distance* de x et de y.
Elle vérifie : $\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} d(x, y) \geqslant 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \end{cases}$

Remarques

– Pour tous réels x et y, on a $d(|x|, |y|) \leqslant d(x, y)$, c'est-à-dire $|\,|x| - |y|\,| \leqslant |x - y|$.
Ce résultat complète donc l'inégalité triangulaire.
– Si a est dans $\mathbb{R}$ et b dans $\mathbb{R}^+$, on a l'équivalence $|x - a| \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant x \leqslant a + b$.

4.1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 4.1.5

Pour tous réels a et b, on définit les ensembles suivants, dits *intervalles* de $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} [a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\} & [a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\} \\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\} &]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \\ ]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} & \\ [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x\} &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} \\ ]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\} &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} \end{cases}$$

En particulier : $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$, $\quad \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$, $\quad \mathbb{R}^- =]-\infty,0]$, $\quad \mathbb{R}^{-*} =]-\infty,0[$

Remarques et définitions

- On dit que $[\,a,b\,]$ (avec $a \leqslant b$) est le *segment* d'origine a et d'extrémité b.
- Les intervalles $]\,a,b\,[$, $]\,a,+\infty[$, $]-\infty,b[$ et $]-\infty,+\infty[$ sont dits *ouverts*.
- Les intervalles $[\,a,b\,]$, $[\,a,+\infty[$, $]-\infty,b\,]$ et $]-\infty,+\infty[$ sont dits *fermés*.
- Les intervalles $]\,a,b\,]$ et $[\,a,b\,[$ sont dits *semi-ouverts* (ou *semi-fermés* !).
- Le segment $[\,a,a\,]$ se réduit à $\{a\}$; L'intervalle $]\,a,a\,[$ est vide.
- Les segments sont les intervalles fermés bornés.

La proposition suivante est admise pour l'instant. Elle sera démontrée en 4.1.6

Proposition 4.1.4 (caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble I est un intervalle si et seulement si I est convexe *c'est-à-dire :* $\forall\,(x,y) \in I \times I,\ [\,x,y\,] \subset I$

Autrement dit : I est un intervalle si et seulement si, dès que I contient deux réels x et y, alors I contient le segment qui les joint.

4.1.5 Parties majorées, minorées, bornées

Dans les définitions suivantes, A désigne une partie de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide).

Définition 4.1.6 (partie majorée)

On dit qu'un réel M *majore* A (ou est un *majorant* de A) si $M \geqslant a$ pour tout a de A.

On dit que A est *majorée* si l'ensemble de ses majorants est non vide.

Définition 4.1.7 (partie minorée)

On dit qu'un réel m *minore* A (ou est un *minorant* de A) si $m \leqslant a$ pour tout a de A.

On dit que A est *minorée* si l'ensemble de ses minorants est non vide.

Définition 4.1.8 (partie bornée)

On dit que A est *bornée* si A est à la fois minorée et majorée. Ainsi A est bornée si et seulement si il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tels que $m \leqslant a \leqslant M$ pour tout a de A.

Remarques

- La partie vide est bornée ! Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bornée.
- Dire que A est majorée, c'est dire qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que : $A \subset]-\infty, M]$.
  Dire que A est minorée, c'est dire qu'il existe m dans $\mathbb{R}$ tel que : $A \subset [m, +\infty[$.
  Dire que A est bornée, c'est dire qu'il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tels que : $A \subset [m, M]$.
- Si M est un majorant de A, alors tout réel $M' \geqslant M$ est a fortiori un majorant de A.
  Si m est un minorant de A, alors tout réel $m' \leqslant m$ est a fortiori un minorant de A.
- Parmi les intervalles de $\mathbb{R}$, seuls ceux qui sont de la forme $[\,a, b\,]$, $]\,a, b\,]$, $[\,a, b\,[$ ou $]\,a, b\,[$ sont bornés.
- Dire que A est bornée, c'est dire qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in A,\ |x| \leqslant M$. On exprime cette propriété en disant que A est bornée si et seulement si elle est « majorée en valeur absolue ».
- Posons $-A = \{-a,\ a \in A\}$.
  Avec ces notations : A est majorée (resp. minorée) si et seulement si $-A$ est minorée (resp. majorée).

Définition 4.1.9 (élément maximum)

Soit α un élément de A.

On dit que α est un *maximum* (ou un *plus grand élément*) de A si $\alpha \geqslant x$ pour tout x de A.

Si un tel élément existe, il est unique. On le note alors $\alpha = \max(A)$.

Définition 4.1.10 (élément minimum)

Soit α un élément de A.

On dit que α est un *minimum* (ou un *plus petit élément*) de A si $\alpha \leqslant x$ pour tout x de A.

Si un tel élément existe, il est unique. On le note alors $\alpha = \min(A)$.

Remarques et exemples

- Dire que A possède un maximum, c'est dire que l'un des éléments de A est un majorant de A.
  Dire que A possède un minimum, c'est dire que l'un des éléments de A est un minorant de A.
- L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais non minoré (donc non borné).
  L'ensemble de ses majorants est $[1, +\infty[$. Le maximum de A n'existe pas.
- L'intervalle $B = [-2, +\infty[$ est minoré mais non majoré.
  L'ensemble de ses minorants est $]-\infty, -2]$, et on a $\min(B) = -2$.
- L'intervalle $C =]0, 1[$ est borné, mais $\min(C)$ et $\max(C)$ n'existent pas.
- L'intervalle $D = [0, 1]$ est borné. De plus $\min(D) = 0$ et $\max(D) = 1$.
- Si $A = \left\{\dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\min A = 0$, et $\max A$ n'existe pas. L'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$

4.1.6 Borne supérieure et borne inférieure dans $\mathbb{R}$

L'axiome suivant, très important, constitue une spécificité de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.

Axiome (axiome de la borne supérieure)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Alors l'ensemble des majorants de A possède un élément minimum.
Cet élément est appelé borne supérieure *de A, et on le note* $\sup(A)$.

Remarques

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

– Le réel $\beta = \sup(A)$ est **caractérisé** par les deux propriétés $\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant \beta \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \beta - \varepsilon < a \leqslant \beta \end{cases}$
  Autrement dit, ce qui caractérise β c'est que :
  d'une part, β est un majorant de A.
  d'autre part, tout réel strictement inférieur à β n'est **pas** un majorant de A.
– L'ensemble des majorants de A est alors l'intervalle $[\beta, +\infty[$.
– On retiendra donc : *toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*
  Et d'une façon plus familière : *la borne supérieure de A, c'est le plus petit des majorants des A.*

L'axiome de la borne supérieure étant admis, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.1.5 (propriété de la borne inférieure)
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
Alors l'ensemble des minorants de A possède un élément maximum.
Cet élément est appelé borne inférieure *de A, et on le note* $\inf(A)$.

Remarques

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

– Le réel $\alpha = \inf(A)$ est **caractérisé** par les deux propriétés $\begin{cases} \forall x \in A,\ x \geqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \alpha \leqslant a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$
  Autrement dit, ce qui caractérise α c'est que :
  d'une part, α est un minorant de A.
  d'autre part, tout réel strictement supérieur à α n'est **pas** un minorant de A.
– L'ensemble des minorants de A est alors l'intervalle $]-\infty, \alpha]$.
– On retiendra donc : *toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*
  Et d'une façon plus familière : *la borne inférieure de A, c'est le plus grand des minorants de A.*

Quelques propriétés de la borne Sup et la borne Inf

– Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (donc telle que $\sup(A)$ existe).
  Dire que x majore A (donc écrire que $x \geqslant a$ pour tout a de A) c'est dire que $x \geqslant \sup(A)$.
  Dire que $\max(A)$ existe, c'est dire que $\sup(A)$ est élément de A. Dans ce cas, $\sup(A) = \max(A)$.

– Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ (donc telle que $\inf(A)$ existe).
Dire que x minore A (donc écrire que $x \leqslant a$ pour tout a de A) équivaut à écrire $x \leqslant \inf(A)$.
Dire que $\min(A)$ existe, c'est dire que $\inf(A)$ est élément de A. Dans ce cas, $\inf(A) = \min(A)$.

– Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
Si B est majorée et si $A \subset B$, alors A est majorée et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
Si B est minorée et si $A \subset B$, alors A est minorée et $\inf(B) \leqslant \inf(A)$.

– Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On rappelle la notation $-A = \{-a, a \in A\}$.
Si A est majorée, alors $-A$ est minorée et : $\inf(-A) = -\sup(A)$.
Si A est minorée, alors $-A$ est majorée et : $\sup(-A) = -\inf(A)$.

– Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On rappelle la notation $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$.
Si A et B sont majorées, alors $A + B$ est majorée et : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
Si A et B sont minorées, alors $A + B$ est minorée et : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

– Enfin les résultats suivants sont évidents, pour tous réels a et b, avec $a < b$:
$$\begin{cases} \sup([a, b]) = \sup([a, b[) = \sup(]a, b]) = \sup(]a, b[) = \sup(]-\infty, b]) = \sup(]-\infty, b[) = b \\ \inf([a, b]) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b]) = \inf(]a, b[) = \inf([a, +\infty[) = \inf(]a, +\infty[) = a \end{cases}$$

Caractérisation des intervalles

La propriété suivante est une caractérisation commode des intervalles de $\mathbb{R}$ (ce n'en est pas une définition, car l'énoncé suppose connue celle des segments $[x, y]$).

Proposition 4.1.6 (caractérisation des intervalles)
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide).
Alors I est un intervalle si et seulement si : $\forall (x, y) \in I \times I,\ [x, y] \subset I$.
Autrement dit, les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui, dès qu'elles contiennent deux points, contiennent le segment qui les joint. On l'exprime en disant que les intervalles sont les parties convexes *de $\mathbb{R}$.*

4.1.7 Partie entière d'un nombre réel

On commence par démontrer un résultat qui semble évident, mais qui est une conséquence de l'axiome de la borne supérieure.

Proposition 4.1.7 ($\mathbb{R}$ est archimédien)
Soit x un réel, et a un réel strictement positif. Alors il existe un entier n tel que $na > x$.
On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Démonstration

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que $\mathcal{A} = \{na,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par x. L'ensemble A, majorée non vide, possède donc une borne supérieure α dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $(n+1)a \leqslant \alpha$ donc $na \leqslant \delta$ avec $\delta = \alpha - a < \alpha$. Donc δ serait un majorant de $\mathcal{A}$, avec $\delta < \alpha$, mais ça contredit la définition de α.

Proposition 4.1.8
Soit x un réel, et a un réel strictement positif.
Alors il existe un couple unique (n, y) de $\mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = na + y$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $a = 1$ pour obtenir la notion de partie entière.

Définition 4.1.11 (partie entière)
Soit x un réel. Il existe un entier relatif unique m tel que $m \leqslant x < m + 1$.
On l'appelle *partie entière* de x et on le note $\lfloor x \rfloor$.

Quelques propriétés de la partie entière

- Pour tout réel x, on a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, ou encore : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout m de $\mathbb{Z}$, on a : $\lfloor x \rfloor = m \;\Leftrightarrow\; x \in [m, m + 1[$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\lfloor x \rfloor = x \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{Z}$
- Si x est réel non entier, alors : $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout m de $\mathbb{Z}$, on a : $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$
- Pour tous réels x et y : $\lfloor x + y \rfloor \in \{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1\}$

4.1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 4.1.9 (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)
Soient x et y deux réels, avec $x < y$. L'intervalle $]x, y[$ contient une infinité de nombres rationnels.
On exprime cette situation en disant que $\mathbb{Q}$ est dense *dans $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est également dense dans $\mathbb{R}$.

On rappelle la définition des nombres décimaux.

Définition 4.1.12 (nombres décimaux)
On dit qu'un réel x est un nombre décimal s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}$ tel que $x = k\,10^{-n}$.

Remarques

- Si on note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux, on a $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$.
- Les décimaux sont les réels qui peuvent s'écrire « avec un nombre fini de chiffres après la virgule ».
- Soit x un nombre rationnel, écrit sous forme irréductible $x = \dfrac{a}{b}$, avec a dans $\mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$, et $a \wedge b = 1$.
  Alors x est décimal si et seulement si les seuls diviseurs premiers éventuels de b sont 2 et 5.
- L'ensemble des décimaux est stable pour l'addition et pour le produit.
  En revanche si x est un décimal non nul, son inverse $\dfrac{1}{x}$ n'est en général pas un décimal.
  En fait les $x \neq 0$ tels que x et $\dfrac{1}{x}$ soient décimaux sont les $x = \pm\, 2^n 5^m$, avec (n, m) dans $\mathbb{Z}^2$.

Définition 4.1.13 (approximations décimales d'un réel)
Soit x un nombre réel et n un entier naturel.
Il existe un unique entier relatif m tel que $m10^{-n} \leqslant x < (m+1)10^{-n}$.
Le réel $\alpha_n = m10^{-n}$ est appelé *valeur approchée* de x à 10^{-n} près *par défaut*. On a $\alpha_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$.
Le réel $\beta_n = (m+1)10^{-n}$ est appelé *valeur approchée* de x à 10^{-n} près *par excès*.

Densité de l'ensemble des décimaux dans $\mathbb{R}$

Les propriétés ci-dessous montrent que l'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit x un nombre réel. Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons $\alpha_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et $\beta_n = \alpha_n + 10^{-n}$.
- La suite (α_n) est une suite croissante de nombres décimaux.
- La suite (β_n) est une suite décroissante de nombres décimaux.
- Les deux suites (α_n) et (β_n) convergent vers x.

4.1.9 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 4.1.14
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Cet ensemble est appelé *droite numérique achevée*.

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

On étend l'ordre total de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R}, -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ (en fait $-\infty < x < +\infty$).

Opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$

De même, on étend (de façon toujours commutative) les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ en posant :

$$\text{Pour l'addition : } \begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, & x + (-\infty) = -\infty \qquad x + (+\infty) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Pour le produit : } \begin{cases} (+\infty)(+\infty) = +\infty & (-\infty)(-\infty) = +\infty & (-\infty)(+\infty) = -\infty \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, & x(-\infty) = -\infty & x(+\infty) = +\infty \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{-*}, & x(-\infty) = +\infty & x(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

Formes indéterminées

On ne donne pas de valeur aux expressions suivantes : $(+\infty) + (-\infty)$, $0(+\infty)$ et $0(-\infty)$.
Ces expressions sont appelées *formes indéterminées*.
Utiliser $\overline{\mathbb{R}}$ permet de simplifier les énoncés du genre : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mu \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lambda + \mu$

Ce résultat est en effet vrai pour tous λ, μ de $\overline{\mathbb{R}}$ à l'exception des formes indéterminées pour lesquelles on devra faire une étude plus poussée (on devra donc *lever* la forme indéterminée).

4.2 Puissances à exposants entiers ou rationnels

4.2.1 Exposants entiers relatifs

Pour tout x de $\mathbb{C}$ et tout n de $\mathbb{N}$, on définit par récurrence les puissances x^n : $\begin{cases} x^0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x^{n+1} = x^n\, x \end{cases}$
Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

Pour tout x non nul, et pour tout entier $n < 0$, on pose $x^n = (x^{-n})^{-1}$.

On connait donc maintenant le sens de x^n, pour tout x de $\mathbb{C}$ et tout n de $\mathbb{Z}$ (avec $x \neq 0$ si $n < 0$).

Proposition 4.2.1 (propriétés des exposants relatifs)
Pour tous x, y de $\mathbb{C}$, pour tous n, p de $\mathbb{Z}$ (et sous réserve d'existence en cas d'exposants négatifs), on a :

$$(xy)^n = x^n\, y^n, \qquad x^n\, x^p = x^{n+p}, \qquad (x^n)^p = x^{np}, \qquad \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \qquad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$$

On en vient aux variations de $x \mapsto x^m$ sur $\mathbb{R}$ (si m est dans $\mathbb{N}$) ou sur $\mathbb{R}^*$ (si m est dans $\mathbb{Z}^{-*}$).

L'application $x \to x^m$ est paire si m est pair, et impaire si m est impair.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } m > 0, \\ \text{strictement décroissante si } m < 0, \\ \text{constante (valeur 1) si } m = 0 \end{cases}$

Le tableau ci-après indique ce que devient l'inégalité $x < y$ par élévation à la puissance m−ième.

	$m > 0$, pair	$m > 0$, impair	$m < 0$, pair	$m < 0$, impair
$0 < x < y \Rightarrow$	$0 < x^m < y^m$	$0 < x^m < y^m$	$0 < y^m < x^m$	$0 < y^m < x^m$
$x < y < 0 \Rightarrow$	$0 < y^m < x^m$	$x^m < y^m < 0$	$0 < x^m < y^m$	$y^m < x^m < 0$

4.2.2 Racine n-ième d'un réel positif

Proposition 4.2.2 (racine n-ième réelle positive, avec n dans $\mathbb{N}^*$, d'un réel positif)
Soit n un entier strictement positif. Soit a un réel positif (ou nul).
Il existe un unique réel positif ou nul x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$, ou encore $a^{1/n}$.
Ce réel x est appelée est la racine n-ième positive du réel positif a.

Remarques

– Si $n = 2$, on note $\sqrt{a}$ (plutôt que $\sqrt[2]{a}$) l'unique x de $\mathbb{R}^+$ tel que $x^2 = a$.
– Par exemple, l'unique réel x tel que $x^3 = 8$ est $x = 2$. Donc $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = 2$.
  L'unique réel x tel que $x^3 = -8$ est $x = -2$, mais on n'écrira pas $\sqrt[3]{-8} = -2$ ou $(-8)^{1/3} = -2$.
  Citons le programme de la classe de MPSI : *les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}^{-*}$.*

Attention ! (cas des nombres complexes)

Les remarques suivantes peuvent être passées en première lecture.

– On n'a parlé ici que de $x = \sqrt[n]{a}$, ou $x = a^{1/n}$ (n dans $\mathbb{N}^*$), avec a et x dans $\mathbb{R}^+$.
  Le problème précédent (trouver x tel que $x^n = a$) est très différent dans $\mathbb{C}$ (voir chapitre 3).

- Par exemple, si a est dans $\mathbb{C}$ (et $a \neq 0$), l'équation $x^2 = a$ possède exactement deux solutions distinctes et opposées dans $\mathbb{C}$, qu'on appelle les deux *racines carrées complexes* de a.
  Les deux racines carrées complexes de 5 sont $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$ (elles sont réelles !).
  De même, les deux racines carrées complexes de -1 sont $x = i$ et $x = -i$.
  Dernier exemple : les deux racines carrées complexes de $2i$ sont $x = 1 + i$ et $x = -1 - i$.
  Comme il n'y a aucun moyen ojectif et sûr de choisir entre les deux racines carrées de a (dans le cas général) on n'écrira jamais $\sqrt{a}$ (sauf si a est dans $\mathbb{R}^+$, où $\sqrt{a}$ désigne la *racine carrée positive* de a).
  Par exemple, les notations $\sqrt{-1}$, ou encore $\sqrt{2i}$, sont interdites !
- Plus généralement l'équation $x^n = a$ (où a est un nombre complexe non nul) possède exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ (distinctes et non nulles).
  Par exemple les trois solutions de $x^3 = 8$ sont $x = 2$, $x = -1 + i\sqrt{3}$ et $x = -1 - i\sqrt{3}$.
  Les trois solutions de $x^3 = 8i$ sont $x = -2i$, $x = \sqrt{3} + i$ et $x = \sqrt{3} - i$.
  La notation $\sqrt[3]{8}$ désigne 2, mais il est hors de question d'écrire $\sqrt[3]{8i}$.

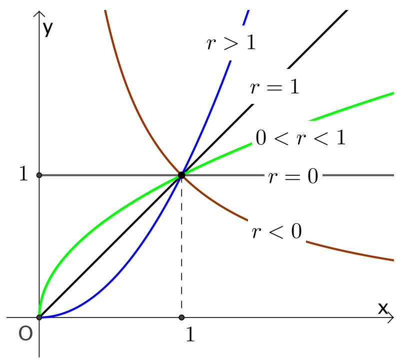
4.2.3 Exposants rationnels

Définition 4.2.1 (puissances rationnelles d'un nombre réel)
Soit r un nombre rationnel, écrit sous la forme $r = p/q$ (avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$).
On pose $x^r = \left(x^{1/q}\right)^p$. Le domaine de définition de $x \mapsto x^r$ est : $\mathbb{R}^+$ si $p \geqslant 0$, et $\mathbb{R}^{+*}$ si $p < 0$.

Remarque : la valeur x^r est indépendante de l'écriture choisie pour $r = \dfrac{p}{q}$, dans la mesure où $q > 0$.

Propriétés

- Les relations sur les fonctions puissances sont encore valables avec des exposants rationnels.
  Ainsi, pour r, s dans $\mathbb{Q}$, on a les identités :
  $(xy)^r = x^r\, y^r$, $x^r\, x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$, $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$
- Ci-contre, on voit les différentes représentations graphiques.
  On retiendra notamment que x^r et x^s sont dans le même ordre que r et s quand $x > 1$, et dans l'ordre contraire si $0 < x < 1$.
- La généralisation « ultime » de la notation x^α est $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, mais elle suppose connue les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto \ln t$.



courbes $y = x^r$

4.3 Généralités sur les fonctions numériques

Dans la suite, on considère des fonctions f à valeurs réelles, définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On note par exemple $f : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$, et dit que f est une *fonction numérique*.

Avec ces notations, on dit que $\mathcal{D}$ est le *domaine de définition* de f.

Le plus souvent ; $\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion disjointe d'intervalles.

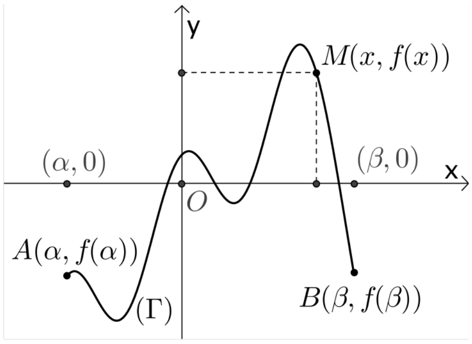
4.3.1 Représentations graphiques

On munit le plan d'un repère orthogonal (et même, le plus souvent, orthonormé).

L'ensemble (Γ) des points M de coordonnées $(x, f(x))$ est appelé *courbe représentative* (ou *graphe*) de f.

Chaque *droite verticale*, d'équation $x = x_0$, où x_0 est dans $\mathcal{D}$, rencontre (Γ) en l'unique point $(x_0, f(x_0))$.

On voit ici la courbe représentative d'une fonction définie sur un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$.



Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit (Γ) sa courbe représentative.

À partir de f et d'un réel a, on va voir plusieurs définitions d'une fonction f_a.

À chaque fois, on va déterminer son domaine $\mathcal{D}_a$, et trouver la relation géométrique entre les courbes représentatives (Γ) de f et (Γ_a) de f_a.

Représentation graphique de $x \mapsto f_a(x) = f(x) + a$

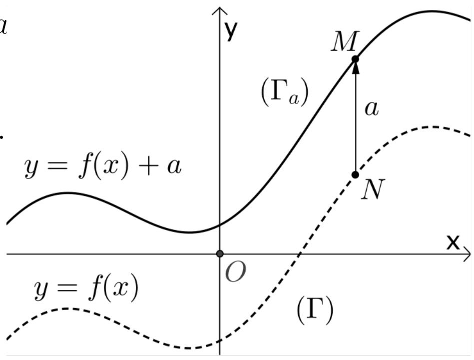
Posons par exemple $f_a(x) = f(x) + a$.

Le domaine $\mathcal{D}_a$ de f_a égal au domaine $\mathcal{D}$ de f.

(Γ_a) se déduit de (Γ) par la translation de vecteur $(0, a)$.

En effet, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Gamma_a \quad &\Leftrightarrow \; y = f_a(x) = f(x) + a \\ &\Leftrightarrow \; y - a = f(x) \\ &\Leftrightarrow \; N(x, y-a) \in \Gamma \end{aligned}$$



Représentation graphique de $x \mapsto f_a(x) = f(x + a)$

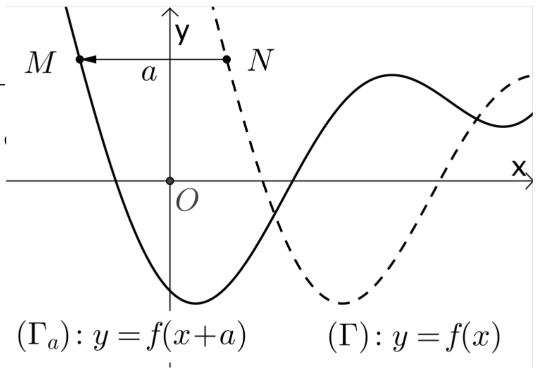
Si $f_a(x) = f(x + a)$, alors $\mathcal{D}_a = \{x - a,\ x \in \mathcal{D}\}$.

Ainsi $(\mathcal{D}_a)$ se déduit de $(\mathcal{D})$ par la translation $x \mapsto x-$

De même, (Γ_a) se déduit de (Γ) par la translation vecteur $(-a, 0)$.

En effet, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Gamma_a \quad &\Leftrightarrow \; y = f_a(x) = f(x + a) \\ &\Leftrightarrow \; N(x + a, y) \in \Gamma \end{aligned}$$



Représentation graphique de $x \mapsto f_a(x) = f(a - x)$

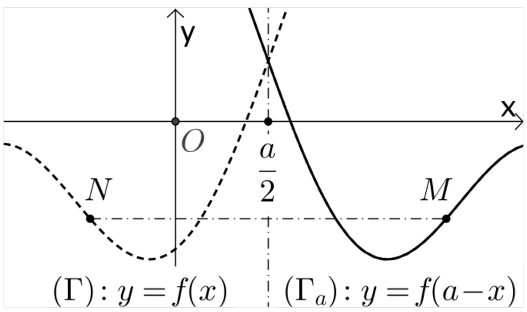
Si $f_a(x) = f(a - x)$, alors $\mathcal{D}_a = \{a - x,\ x \in \mathcal{D}\}$.

Ainsi $(\mathcal{D}_a)$ se déduit de $(\mathcal{D})$ par la symétrie $x \mapsto a - x$ par rapport à la valeur $a/2$.

De même, la courbe (Γ_a) se déduit de (Γ) par la symétrie par rapport à l'axe vertical d'équation $x = a/2$.

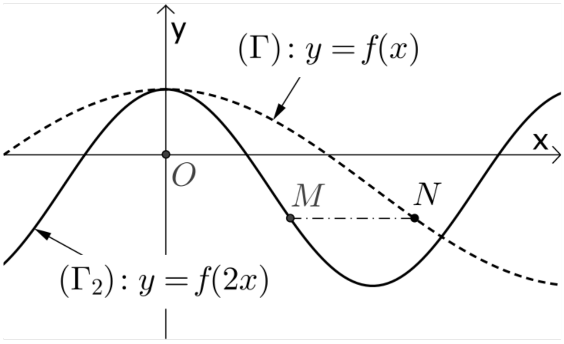
En effet, on a les équivalences :

$$M(x,y) \in \Gamma_a \quad \Leftrightarrow \; y = f(a - x) \; \Leftrightarrow \; N(a - x, y) \in \Gamma$$



Cas particulier : la courbe représentative de $x \mapsto f(-x)$ est symétrique de (Γ) par rapport à Oy.

Représentation graphique de $x \mapsto f_a(x) = f(ax)$



Si $f_a(x) = f(ax)$, alors $\mathcal{D}_a = \{x/a,\ x \in \mathcal{D}\}$.

Ainsi $(\mathcal{D}_a)$ se déduit de $(\mathcal{D})$ par l'homothétie $x \mapsto x/a$.

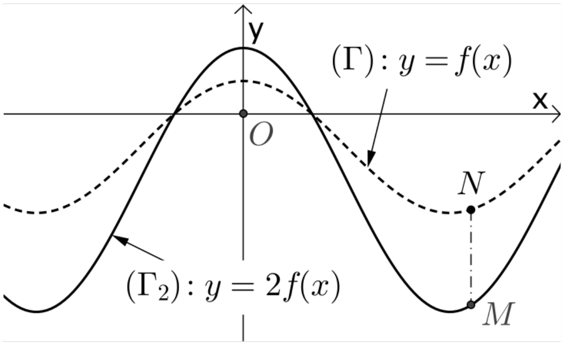
De même, (Γ_a) se déduit de (Γ) par une homothétie de rapport $1/a$ selon les abscisses uniquement (ce qui produit un effet en accordéon horizontal).

En effet, on a les équivalences :

$$M(x, y) \in \Gamma_a \quad \Leftrightarrow \; y = f(ax) \; \Leftrightarrow \; N(ax, y) \in \Gamma$$

Sur l'exemple ci-contre, on a choisi $a = 2$.

Représentation graphique de $x \mapsto f_a(x) = af(x)$



Si $f_a(x) = af(x)$, alors $\mathcal{D}_a = \mathcal{D}$.

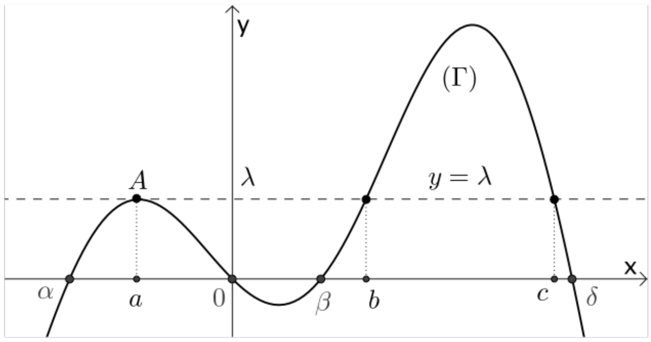
Ici (Γ_a) se déduit de (Γ) par une homothétie de rapport a selon les ordonnées uniquement (ce qui produit un effet en accordéon vertical).

En effet, on a les équivalences :

$$M(x, y) \in \Gamma_a \; \Leftrightarrow \; y = af(x) \; \Leftrightarrow \; N(x, y/a) \in \Gamma$$

Sur l'exemple ci-contre, on a choisi $a = 2$.

Interprétation graphique d'égalités et d'inégalités



Des solutions de $f(x) = \lambda$ peuvent être représentées par les abscisses des points d'intersection de la courbe (Γ) et de la droite horizontale $y = \lambda$ (l'axe Ox dans le cas de l'équation $f(x) = 0$).

Sur cet exemple, on *voit* quatre solutions distinctes $\alpha < 0 < \beta < \delta$ de l'équation $f(x) = 0$. On *voit* aussi trois solutions $a < b < c$ de $f(x) = \lambda$ (la solution a pouvant être qualifiée de « double » ou « multiple »).

On interprète facilement les solutions des inéquations $f(x) < \lambda$, ou $f(x) \leqslant \lambda$, ou $f(x) \geqslant \lambda$, ou $f(x) > \lambda$.

4.3.2 Opérations sur les fonctions numériques

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ (son *domaine de définition*).

L'ensemble $\mathcal{D}$ consiste le plus souvent en une réunion d'intervalles.

L'*étude* de f (continuité, monotonie, extrémums, etc.) s'effectue cependant *intervalle par intervalle.*

C'est pourquoi on se limitera souvent à des fonctions réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (évidemment l'intervalle I ne doit être ni vide, ni réduit à un point).

On note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$, l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

On rappelle que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$: $f = g \; \Leftrightarrow \; \forall\, x \in \mathcal{D},\; f(x) = g(x)$.

Définition 4.3.1 (somme et produit de deux fonctions numériques)

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.

On définit les fonctions $f + g$ et fg par : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{D},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall\, x \in \mathcal{D},\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$

Propriétés immédiates

La fonction constante $x \mapsto 0$ (resp $x \mapsto 1$) est neutre pour l'addition (resp. le produit).

L'opposée d'une fonction f est la fonction notée $-f$ définie par : $\forall\, x \in I,\ (-f)(x) = -f(x)$.

On peut parler de $\dfrac{1}{f}$ si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$. Dans ces conditions : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ \dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Soit λ un réel. On note encore λ la fonction constante $x \mapsto \lambda$.

La notation λf désigne la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

On peut ainsi former des *combinaisons linéaires* $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ de fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

Si les fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ ont des domaines différents, celui de $f+g$ et de fg est $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

Définition 4.3.2 (composée de deux fonctions numériques)
Soit f et g deux fonctions numériques, de domaines respectifs $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
On définit une fonction numérique, notée $g \circ f$, en posant $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Le domaine de la fonction $g \circ f$ est $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g\}$.

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donc l'ensemble des réels x pour lesquels d'une part $f(x)$ existe, et d'autre part $f(x)$ est dans le domaine de définition de g.

Dans les questions théoriques portant sur la composition (monotonie par exemple), on considérera souvent des fonctions numériques $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (définies respectivement sur les intervalles I et J) et on ajoutera la condition $f(I) \subset J$ pour s'assurer que la fonction $g \circ f$ est définie sur I.

On est souvent amené à étudier des fonctions numériques f obtenues par somme, produit, quotient, composition de fonctions usuelles f_k (dont il est bien sûr indispensable de connaître le domaine). On déterminera alors le domaine de définition de f en appliquant les règles indiquées précédemment, et en prêtant attention à la chronologie des compositions de fonctions.

4.3.3 Fonctions paires ou impaires

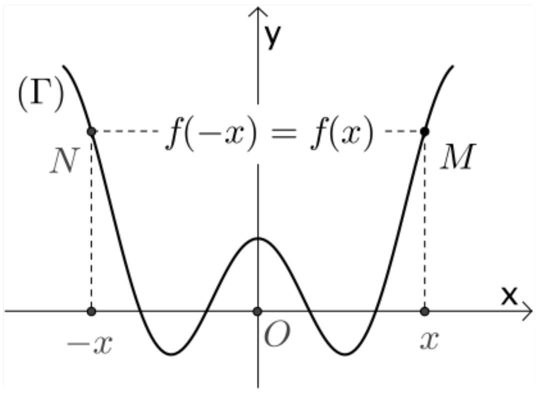
On considère ici des fonctions numériques définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.
On suppose que l'ensemble $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'origine (donc : $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}$).
Le cas le plus courant est celui d'un intervalle de centre 0, et notamment $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Définition 4.3.3 (parité, imparité)
On dit que f est *paire* si : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
On dit que f est *impaire* si : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$.

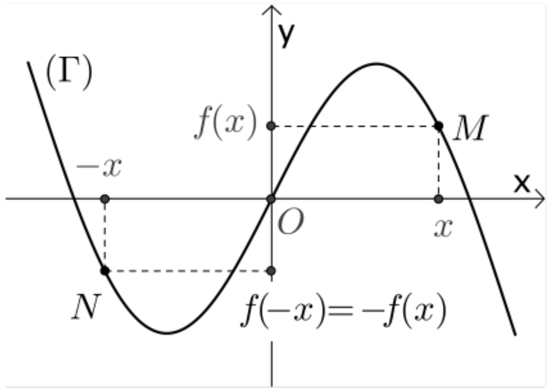
La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

Évoquer la parité ou imparité de : $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ n'a de sens que si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0.

L'interprétation graphique est évidente. La fonction f est paire (resp. impaire) si et seulement si sa représentation graphique (Γ) est symétrique par rapport à l'axe Oy (resp. l'origine O).



Graphe (Γ) d'une fonction paire



Graphe (Γ) d'une fonction impaire

Proposition 4.3.1 (Parties paire et impaire d'une fonction)
Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ (où le domaine $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0).
Alors f s'écrit de manière unique $f = f_p + f_i$, où f_p est paire et f_i est impaire.
Les fonctions f_p et f_i sont définies par : $\forall x \in \mathcal{D}$, $f_p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$
On dit que f_p est la partie paire *de f et que f_i en est la* partie impaire.

Remarques :

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Les fonctions ch et sh sont appelées *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.
Elles sont donc respectivement la partie paire et la partie impaire de $x \mapsto e^x$.

Proposition 4.3.2 (produits et sommes de fonctions paires ou impaires)
Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, chacune d'elles étant paire ou impaire.
Si f et g ont même parité, alors fg est paire, sinon fg est impaire.
Soit (α, β) dans $\mathbb{R}^2$: si f et g ont même parité, alors $h = \alpha f + \beta g$ a même parité que f et g.

Proposition 4.3.3 (opérations entre fonctions paires ou impaires)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques.
Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire (quelle que soit la fonction g, en fait).
Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors $g \circ f$ a la même parité que g.

Quelques remarques faciles pour terminer

Soit n dans $\mathbb{N}$. Si f est paire, alors f^n est paire. Si f est impaire, alors f^n a la parité de n.

Si f est paire ou impaire alors $|f|$ est paire.

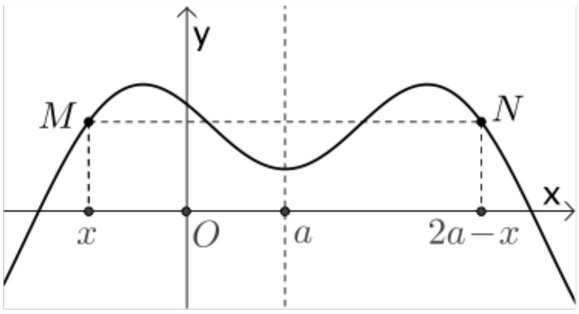
Si f est paire ou impaire et ne s'annule pas, alors $1/f$ a la parité de f.

Si f est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$ et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.

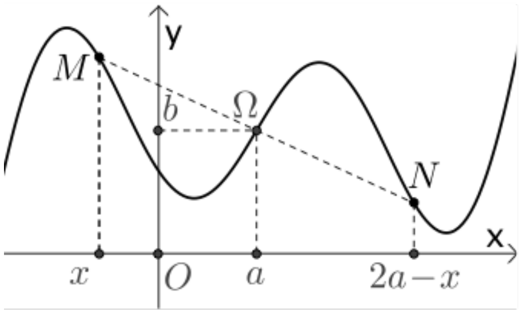
4.3.4 Axes et centres de symétrie

Proposition 4.3.4 (existence d'un axe de symétrie vertical)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *la droite verticale $x = a$ est axe de symétrie du graphe Γ de f.*
– *pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = f(x)$.*
– *pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a + h) = f(a - h)$.*
– *la fonction g définie par $g(x) = f(a + x)$ est paire.*

Proposition 4.3.5 (existence d'un centre de symétrie)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
– *le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie du graphe Γ de f.*
– *pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$.*
– *pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a + h) - b = b - f(a - h)$.*
– *la fonction g définie par $g(x) = f(a + x) - b$ est impaire.*



Axe de symétrie $x = a$



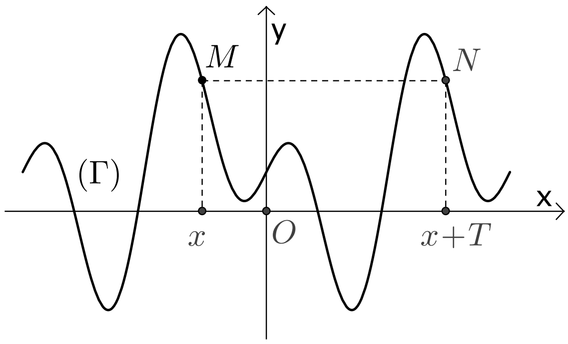
Centre de symétrie $\Omega(a, b)$

4.3.5 Applications périodiques

Définition 4.3.4 (fonction T-périodique)
Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit T un réel strictement positif.
La fonction f est dite *T-périodique* si : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$
On a alors, pour tout x de $\mathcal{D}$ et tout k de $\mathbb{Z}$: $f(x + kT) = f(x)$.

Une condition nécessaire pour qu'on puisse évoquer la T-périodicité de $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est que le domaine $\mathcal{D}$ soit lui-même *stable* par la translation $x \mapsto x + T$ (on le supposera dans ce qui suit).

L'interprétation graphique est facile : dire que la fonction f est T-périodique c'est dire que son graphe Γ est stable dans la translation de vecteur $(T, 0)$ (parallèle à Ox).



Notion de plus petite période positive

Si la fonction f est T-périodique, alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, elle est nT-périodique.

On cherchera donc, si possible, la plus petite période positive (qu'on appelera alors **la** période de f).

Dans certains cas très spécifiques, cette plus petite période n'existe pas : il en est ainsi par exemple de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, qui admet tout rationnel positif comme période.

Opérations entre fonctions T-périodiques

Si f et g sont T-périodiques, alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont T-périodiques.

Si f est périodique et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est T-périodique.

Si f est T-périodique, alors pour toute fonction g, la fonction $g \circ f$ est T-périodique.

Quand on combine des fonctions de période T, on peut obtenir des fonctions de période inférieure à T.

Par exemple $\begin{cases} x \mapsto \sin x \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ sont 2π-périodiques, mais $\begin{cases} x \mapsto \sin x \cos x & \text{est } \pi\text{-périodique} \\ x \mapsto (\sin x \cos x)^2 & \text{est } \pi/2\text{-périodique} \end{cases}$

Cas de deux fonctions ayant des périodes distinctes

Soit f une fonction de période T_1, et soit g une fonction de période T_2.

On suppose que le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel. Alors $f + g$ et fg sont encore périodiques.

Par exemple : si $T_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $T_2 = \dfrac{\pi}{2}$, alors $f + g$ et fg sont périodiques de période $\dfrac{3\pi}{2}$.

Mais si le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, alors $f + g$ et fg ne sont en général pas périodiques.

Si f est de période T, et si α est non nul, alors la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est de période $\dfrac{T}{|\alpha|}$.

4.3.6 Monotonie des fonctions numériques

Définition 4.3.5

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f est :

– *croissante* (au sens large) si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
décroissante (au sens large) si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.

– *strictement croissante* si : $\forall\,(x,y) \in \mathcal{D}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
  strictement décroissante si : $\forall\,(x,y) \in \mathcal{D}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
– *monotone* (au sens large) si f est croissante ou décroissante.
  strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

Quand on parle de monotonie, c'est par défaut de monotonie au sens large.

f est croissante (resp. décroissante) $\Longleftrightarrow$ f conserve (resp. inverse) les inégalités larges.

f est strictement croissante (resp. décroissante) $\Longleftrightarrow$ f conserve (resp. inverse) les inégalités strictes.

Seules les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.

Dire que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ n'est pas monotone, c'est dire : $\exists\,(x,y,z) \in \mathcal{D}^3,\ z \in [x,y],\ f(z) \notin [f(x), f(y)]$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur un intervalle I. Dire que f n'est pas strictement monotone signifie qu'il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I (avec $a < b$) sur lequel f garde une valeur constante.

Monotonie et taux d'accroissement

Pour tous a, b distincts de $\mathcal{D}$, on note $T_f(a,b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ le taux d'accroissement de f entre a et b.

La quantité $T_f(a,b) = T_f(b,a)$ mesure le coefficient directeur de la corde entre $M(a, f(a))$ et $N(b, f(b))$.

Avec ces notations :

– La fonction f est croissante (au sens large) $\Leftrightarrow$ tous ses taux d'accroissement sont positifs ou nuls.
– La fonction f est décroissante (au sens large) $\Leftrightarrow$ tous ses taux d'accroissement sont négatifs ou nuls.
– La fonction f est strictement croissante $\Leftrightarrow$ tous ses taux d'accroissement sont strictement positifs.
– La fonction f est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ tous ses taux d'accroissement sont strictement négatifs.

Opérations sur les taux d'accroissement

Soit f et g deux fonctions numériques, définies sur $\mathcal{D}$. Soit λ un nombre réel.
On a les égalités suivantes, en termes de taux d'accroissement :

$$T_{\lambda f}(a,b) = \frac{(\lambda f)(b) - (\lambda f)(a)}{b - a} = \lambda \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda T_f(a,b)$$

$$T_{f+g}(a,b) = \frac{(f+g)(b) - (f+g)(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = T_f(a,b) + T_g(a,b)$$

$$T_{fg}(a,b) = \frac{(fg)(b) - (fg)(a)}{b - a} = g(b)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g(b)T_f(a,b) + f(a)T_g(a,b)$$

Voici deux propositions qui résultent directement des calculs précédents.

Proposition 4.3.6 (sommes de fonctions monotones)
Soit f et g deux fonctions monotones sur leur domaine $\mathcal{D}$.
Si f et g ont même monotonie, alors $f+g$ est monotone sur $\mathcal{D}$ de même monotonie que f et g.
Si de plus f ou g est strictement monotone, alors $f+g$ est strictement monotone.

Il est clair que si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est monotone, et que si λ est un réel :
– si $\lambda \geqslant 0$, alors la fonction λf a la même monotonie que f
– si $\lambda \leqslant 0$, alors la fonction λf a la monotonie contraire de celle de f

En particulier, la fonction $-f$ a la monotonie contraire de celle de f.

Il y a davantage de cas particuliers à envisager pour le produit de deux fonctions monotones :

Proposition 4.3.7 (produits de fonctions monotones)
Soit f et g deux fonctions monotones sur leur domaine $\mathcal{D}$.
– *Si f et g sont positives croissantes, alors fg est positive croissante.*
  Si f et g sont positives décroissantes, alors fg est positive décroissante.
– *Si f et g sont négatives croissantes, fg est positive décroissante.*
  Si f et g sont négatives décroissantes, fg est positive croissante.
– *Si f est positive croissante et g négative décroissante, fg est négative décroissante.*
  Si f est positive décroissante et g négative croissante, fg est négative croissante.

Remarque :
Dans les cas autres que ceux énumérés ci-dessus, on ne peut rien dire.
Quand f et g sont de monotonies contraires, il n'y a donc pas de résultat général concernant $f + g$.
De même, on ne peut rien dire a priori de la monotonie de fg si, par exemple, f est positive croissante tandis que g est positive décroissante.

Taux d'accroissement de $1/f$ si f ne s'annule pas

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, ne s'annulant pas. Pour tous a, b de $\mathcal{D}$ (avec $a \neq b$) :

$$T_{1/f}(a,b) = \frac{(1/f)(b) - (1/f)(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}\right) = \frac{-1}{f(a)f(b)}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-1}{f(a)f(b)}\,T_f(a,b)$$

On en déduit alors facilement le résultat suivant :

Proposition 4.3.8 (monotonie de $1/f$ si f est monotone)
Soit f une fonction monotone de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, strictement positive (ou strictement négative) sur $\mathcal{D}$.
Alors $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur $\mathcal{D}$, de monotonie contraire à celle de f.

Remarque :
La condition que f ne change pas de signe est importante.
Par exemple la fonction $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$, mais $x \mapsto 1/x$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$ (en revanche elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$).

Taux d'accroissement de $g \circ f$

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, de domaines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
On suppose que f est injective sur $\mathcal{D}$. Pour tous a, b de $\mathcal{D}$ (avec $a \neq b$) :

$$T_{g\circ f}(a,b) = \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{g(f(b)) - g(f(a))}{f(b)-f(a)} = T_f(a,b)\,T_g(f(a), f(b))$$

Proposition 4.3.9 (composition de fonctions monotones)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, de domaines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
– *Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante sur son domaine.*
– *Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante sur son domaine.*
Les deux propriétés précédentes restent vraies pour des monotonies strictes.

4.3.7 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 4.3.6
On dit que f est *majorée* sur $\mathcal{D}$ s'il existe un réel β tel que : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ f(x) \leqslant \beta$.
On dit que f est *minorée* sur $\mathcal{D}$ s'il existe un réel α tel que : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ \alpha \leqslant f(x)$.
On dit que f est *bornée* sur $\mathcal{D}$ si elle y est majorée et minorée.
Ainsi, dire que f est bornée sur $\mathcal{D}$, c'est dire qu'il existe α, β tels que : $\forall\, x \in \mathcal{D},\ \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$.

Remarques

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Notons $f(\mathcal{D}) = \{f(x), x \in \mathcal{D}\}$ son *ensemble image*.

Dire que la fonction f est majorée (resp. minorée, bornée) sur $\mathcal{D}$, c'est dire que l'ensemble $f(\mathcal{D})$ est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de $\mathbb{R}$.

Si f est majorée sur $\mathcal{D}$, on note $\sup\limits_{\mathcal{D}} f$, ou encore $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$, la borne supérieure de l'ensemble $f(\mathcal{D})$.

Si f est minorée sur $\mathcal{D}$, on note $\inf\limits_{\mathcal{D}} f$, ou encore $\inf\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$, la borne inférieure de l'ensemble $f(\mathcal{D})$.

Dire que la fonction f est bornée sur $\mathcal{D}$, c'est dire que la fonction $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$.

S'il existe x_0 dans $\mathcal{D}$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{\mathcal{D}} f$, on note $f(x_0) = \max\limits_{\mathcal{D}} f$ (on a un maximum global en x_0).

De même, s'il existe x_1 dans $\mathcal{D}$ tel que $f(x_1) = \inf\limits_{\mathcal{D}} f$, on note $f(x_1) = \min\limits_{\mathcal{D}} f$ (minimum global en x_1).

Quelques propriétés faciles à vérifier

Si f et g sont majorées sur $\mathcal{D}$, alors $f + g$ est majorée sur $\mathcal{D}$, et $\sup\limits_{\mathcal{D}}(f + g) \leqslant \sup\limits_{\mathcal{D}} f + \sup\limits_{\mathcal{D}} g$.

Si f et g sont minorées sur $\mathcal{D}$, alors $f + g$ est minorée sur $\mathcal{D}$, et $\inf\limits_{\mathcal{D}}(f + g) \geqslant \inf\limits_{\mathcal{D}} f + \inf\limits_{\mathcal{D}} g$.

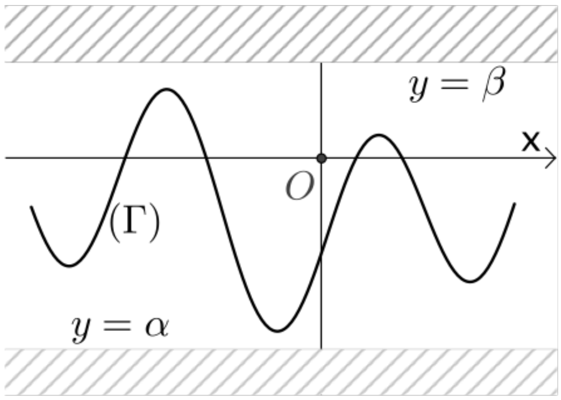
On a les égalités : $\inf\limits_{\mathcal{D}}(-f) = -\sup\limits_{\mathcal{D}} f$, et $\sup\limits_{\mathcal{D}}(-f) = -\inf\limits_{\mathcal{D}} f$.

Si $\alpha > 0$, alors $\sup\limits_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \sup\limits_{\mathcal{D}} f$ et $\inf\limits_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \inf\limits_{\mathcal{D}} f$ (mais si $\alpha < 0$?).

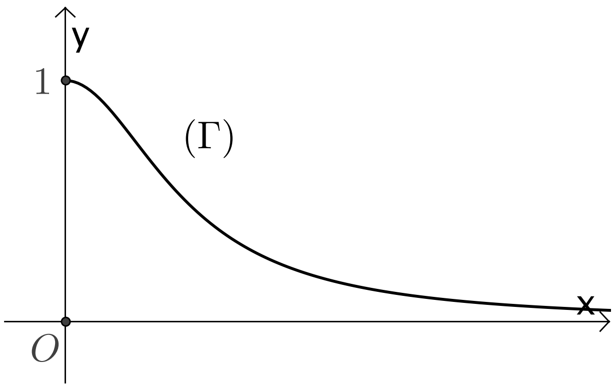
Si f et g sont bornées sur $\mathcal{D}$, alors fg et $\alpha f + \beta g$ sont bornées sur $\mathcal{D}$.

Question : si f est bornée et ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, peut-on affirmer que $\dfrac{1}{f}$ est bornée sur $\mathcal{D}$?

L'interprétation graphique de la notion de fonction majorée et/ou minorée est facile :



$\forall\, x \in \mathcal{D},\ \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$



f décroissante sur $\mathbb{R}^+$: $\max\limits_{\mathbb{R}^+} f = 1,\ \inf\limits_{\mathbb{R}^+} f = 0$

4.4 Dérivation des fonctions numériques

4.4.1 Notion de fonction continue

Dans la suite de ce chapitre, on considère essentiellement des fonctions numériques définies sur un intervalle I non vide et non réduit à un point (on dit aussi « intervalle d'intérieur non vide »).

Dans le cas fréquent d'une fonction définie sur une réunion d'intervalles disjoints, on se ramène au cas précédent en étudiant la restriction de f à chacun de ces intervalles.

Dans ce chapitre, la notion de « fonction continue » (en un point, et plus généralement sur un intervalle) est supposée connue (on se réfèrera au cours de Terminale S).
On se contentera donc pour l'instant d'une approche intuitive de la continuité (la faculté de pouvoir tracer la courbe représentative « sans lever le crayon »).

Les fonctions usuelles (fonctions puissances, trigonométriques, exponentielle, logarithme, etc.) sont continues sur leur domaine (la fonction « partie entière » est une exception notable).

Les deux énoncés suivants permettent donc d'affirmer la continuité d'une fonction numérique définie comme un « cocktail » de fonctions usuelles.

Proposition 4.4.1 (sommes, produits et quotients de fonctions continues)
Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I.
Alors les fonctions $\alpha f + \beta g$ et fg sont continues sur I.
Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Proposition 4.4.2 (composée de deux fonctions continues)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $f(I) \subset J$.
Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

4.4.2 Équation de la tangente en un point

La notion de « fonction dérivable » est supposée connue (cf cours de 1ère S et de Terminale S).

On se bornera à dire, de façon très informelle, que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de I si sa courbe représentative présente, au point $A(a, f(a))$, une tangente **non verticale** Δ_a.

On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.

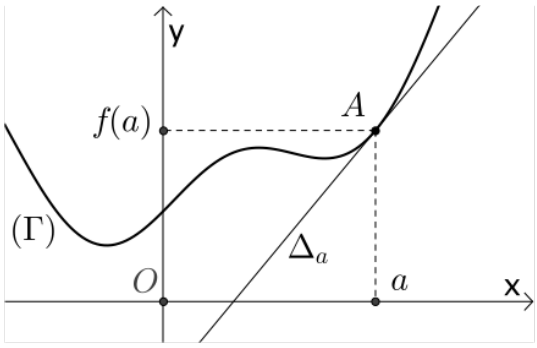
On note alors f' la fonction qui à toute valeur a de I associe le coefficient directeur de la tangente Δ_a.

L'équation de Δ_a est donc : $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

La fonction f' est parfois noté $\mathrm{D}(f)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

On généralise à la notion de dérivée à droite (ou à gauche) en un point (notamment aux bornes de I).

On parle alors de demi-tangente à droite (ou à gauche) au point correspondant de la courbe (Γ).



4.4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

À ce stade, les résultats de cette sous-section sont admis.

Proposition 4.4.3 (dérivée d'une combinaison linéaire)
Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.
Pour tous α, β dans $\mathbb{R}$, $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $h' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition 4.4.4 (dérivée d'un produit)
Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.
La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Proposition 4.4.5 (dérivée de l'inverse, du quotient)
Soit g une fonction dérivable sur I, et ne s'annulant pas sur I.
Alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
Si de plus f est dérivable sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Proposition 4.4.6 (dérivée d'une composée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, avec $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

Les fonctions usuelles (fonctions puissances, trigonométriques, exponentielle, logarithme, etc.) sont en général dérivables sur leur domaine, mais il y a (au moins) deux exceptions notables :

- la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0 (demi-tangentes non colinéaires).
- la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, mais n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

Les énoncés sur les opérations entre fonctions dérivables permettent donc de juger de la dérivabilité d'une fonction numérique définie comme un « cocktail » de fonctions usuelles.

Dans les cas particuliers où ces résultats généraux ne s'appliquent pas (notamment si on considère $x \mapsto |f(x)|$ ou $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ en un point où f s'annule) on sera amené à effectuer une « étude locale ».

Dérivée d'un produit de plusieurs fonctions

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont dérivables sur I, il en est de même de leur produit $g = f_1 f_2 \cdots f_n$.
Plus précisément, on a : $g' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$.
Pour dériver le produit des f_k, on dérive donc chaque f_k « à son tour » et on fait la somme des résultats.

Un cas particulier est la dérivée de f^n, où n est dans $\mathbb{N}^*$. On trouve : $(f^n)' = nf' f^{n-1}$.
Cela se généralise à la formule $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$, où α est un réel (à condition que f^α soit défini).

Si les f_k ne s'annulent pas, la dérivée de leur produit g se retrouve assez bien en considérant :

$$|g| = \prod_{k=1}^{n} |f_k| \Rightarrow \ln|g| = \sum_{k=1}^{n} \ln|f_k| \Rightarrow \frac{g'}{g} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} \Rightarrow g' = g \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g}{f_k} f_k'$$

4.4.4 Dérivabilité et sens de variation

À ce stade, les résultats de cette sous-section sont admis. On rappelle que I est un *intervalle*.

Proposition 4.4.7 (caractérisation des fonctions constantes ou monotones)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On les équivalences :
La fonction f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
La fonction f est croissante (au sens large) sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
La fonction f est décroissante (au sens large) sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

Proposition 4.4.8 (caractérisation des fonctions strictement monotones)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et monotone. Alors f est strictement monotone sur I si et seulement si sa dérivée f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de I d'intérieur non vide (c'est-à-dire si et seulement si f' ne s'annule qu'en des points isolés de I).

Remarques

– Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
Mais l'exemple de $f : x \mapsto x + \cos(x)$ (strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais de dérivée nulle en tous les $x = \pi/2 + k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$) confirme que la réciproque n'est pas vraie (la dérivée peut s'annuler, sans que ça remette en cause la stricte monotonie, du moment que c'est en des points isolés).
– Si on sait que f est constante (ou monotone) sur l'intérieur de I (sur I privé de ses « extrémités ») et si on sait que f est continue aux extrémités de I, alors le caractère constant ou monotone de f s'étend à l'intervalle I tout entier.
– Attention : les résultats énoncés ici sont valables sur un intervalle, pas sur une réunion d'intervalles.
Par exemple, si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$.

4.4.5 Dérivation de la bijection réciproque

À ce stade, les résultats sont admis.

Proposition 4.4.9 (réciproque d'une fonction continue strictement monotone)
Soit f une fonction numérique, continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ (qui est un intervalle).
La bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

On peut en dire un peu plus dans le cas où la fonction f est dérivable de dérivée partout strictement positive (ou partout strictement négative) sur I.

Proposition 4.4.10
Soit f une fonction numérique, dérivable sur l'intervalle I.
On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, ou que $f'(x) < 0$ pour tout x de I.
Le résultat précédent s'applique. De plus f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
Autrement dit, pour tout a de I, et si on note $b = f(a)$, alors $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Interprétation graphique

On suppose ici que le repère est orthonormé.

On note (Γ) le graphe de f, et (Γ') celui de f^{-1}.

(Γ) et (Γ') sont symétriques par rapport à $y = x$.

Soit $A(a, b = f(a))$ sur (Γ), et $B(b, a = f^{-1}(b))$ sur (Γ').

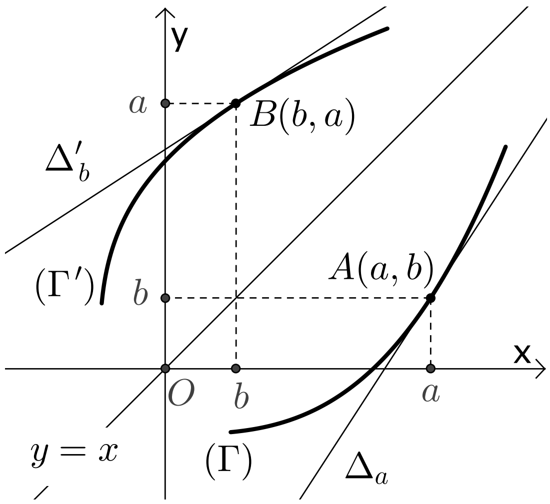
Soit Δ_a la tangente en A à (Γ), Δ'_b la tangente en B à (Γ').

La droite Δ_a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

La droite Δ'_b a pour coefficient directeur $(f^{-1})'(b)$.

Δ_a et Δ'_b sont symétriques par rapport à $y = x$.

L'égalité $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ traduit cette symétrie.



Une situation particulière

Avec les notations ci-dessus, supposons que f soit dérivable en a, mais qu'exceptionnellement $f'(a) = 0$.
Alors la tangente Δ_a au point A de (Γ) est horizontale.

Par symétrie, il en découle que la courbe (Γ') présente une tangente *verticale* au point B.
La fonction f^{-1} n'est donc pas dérivable en b.

Exemples de fonctions réciproques

Les exemples avec $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \tan x$ seront étudiés dans la partie « trigonométrie ».

– La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.

– Pour tout $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont des bijections réciproques de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

– La restriction de $x \mapsto \sin(x)$ à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est bijective de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

  La bijection réciproque, de $[-1, 1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de* x).

– La restriction de $x \mapsto \cos(x)$ à $[0, \pi]$ est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

  La bijection réciproque, de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de* x).

– La restriction de $x \mapsto \tan(x)$ à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

  La bijection réciproque, de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de* x).

4.4.6 Dérivée seconde, concavité, inflexions

Définition 4.4.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.
Si f' est dérivable sur I, on dit que f est *deux fois dérivable* sur I, et on note f'' plutôt que $(f')'$.
On dit que f'' est la *fonction dérivée seconde* de f.

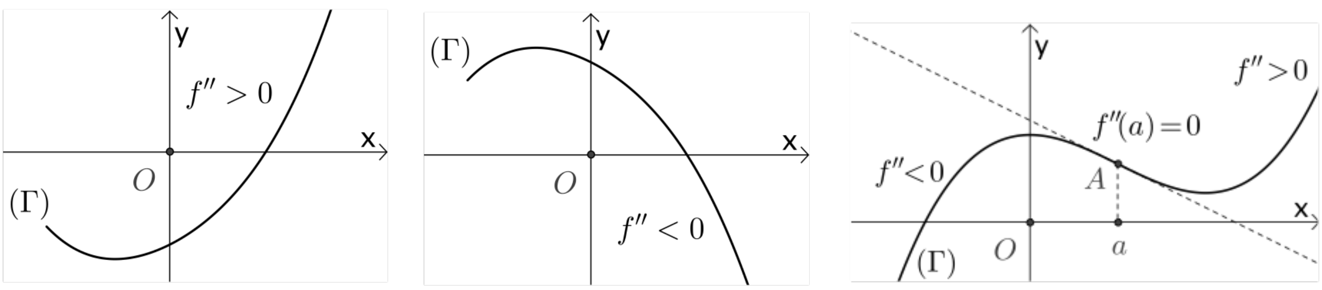
Concavité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique deux fois dérivable.

– Dire que $f'' \geqslant 0$ sur I, c'est dire que f' est croissante sur I.
  Pour la courbe (Γ) cela se traduit par « une concavité tournée vers le haut ».
  On exprimera cette situation en disant que f est une *fonction convexe* sur I.

– Dire que $f'' \leqslant 0$ sur I, c'est dire que f' est décroissante sur I.
  Pour la courbe (Γ) cela se traduit par « une concavité tournée vers le bas ».
  On exprimera cette situation en disant que f est une *fonction concave* sur I.

– Si la fonction f'' change de signe en un point a intérieur à l'intervalle I, cela se traduit par un « changement de concavité » au point $A(a, f(a))$ pour la courbe (Γ).
  En ce point la courbe (Γ) *traverse* sa tangente.
  On exprime cette situation en disant que $A(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de (Γ).



f convexe — f concave — A est un point d'inflexion

4.4.7 Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, définie sur un intervalle I (si f est définie sur une réunion d'intervalles, on se limite à la restriction de f à l'un de ces intervalles).

Si f est dérivable sur I, la fonction f' est appelée *dérivée première* de f.

Si f' est à son tour dérivable sur I, la fonction $f'' = (f')'$ est appelée *dérivée seconde* de f.

Plus généralement, on est amené (si les propriétés de f le permettent) à définir les *fonctions dérivées successives* de f. Plus précisément :

Définition 4.4.2 (fonction n fois dérivable sur un intervalle)
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de I.
Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
Soit k dans $\mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I.
On note alors $f^{(k+1)}$ la fonction dérivée de $f^{(k)}$, c'est-à-dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Si la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I.
On dit aussi que $f^{(n)}$ est la *fonction dérivée n-ième* de f sur I.

Quelques remarques

– On retiendra que $f^{(0)} = f$ (la dérivée « zéro-ième » de f) c'est f, et que $f^{(1)} = f'$.
  On note souvent f'' (plutôt que $f^{(2)}$) et f''' (plutôt que $f^{(3)}$) les dérivées seconde et troisième de f.
  À partir de la dérivée quatrième (donc si $k \geqslant 4$), on utilise obligatoirement la notation $f^{(k)}$.
– Si la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe pour tout n, on dit que f est *indéfiniment dérivable* sur I.
– La fonction $f^{(n)}$ peut également être notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.
– Si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est p fois dérivable, alors f est $n+p$ fois dérivable et $(f^{(n)})^{(p)} = f^{(n+p)}$

Proposition 4.4.11 (sommes de fonctions n fois dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables. Soit α et β deux réels.
Alors $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable sur I et : $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Proposition 4.4.12 (produit de deux fonctions n fois dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables.
Alors la fonction produit fg est n fois dérivable sur I et on a : $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Le résultat précédent (connu sous le nom de « formule de Leibniz ») dit par exemple que :

– La dérivée seconde de fg est : $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$
– La dérivée troisième de fg est : $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$
– La dérivée quatrième de fg est : $(fg)^{(4)} = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{(4)}$

Proposition 4.4.13 (quotient de fonctions n fois dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivables.
On suppose que g ne s'annule pas sur I. Alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont n fois dérivables sur I.

Après $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, ça se complique : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'' = -\left(\dfrac{g'}{g^2}\right)' = -(g'g^{-2})' = \dfrac{2(g')^2 - g''g}{g^3}$, etc.

Proposition 4.4.14 (composée de fonctions n fois dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, deux fonctions n fois dérivables, avec $f(I) \subset J$.
Alors la fonction $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

Après $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$, ça se complique : $(g \circ f)'' = f'' \cdot (g' \circ f) + (f')^2 \cdot (g'' \circ f)$, etc.

Proposition 4.4.15 (réciproque d'une fonction n fois dérivable)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique n fois dérivable.
On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, ou que $f'(x) < 0$ pour tout x de I.
Alors la fonction réciproque f^{-1} est n fois dérivable sur l'intervalle $J = f(I)$.

Après $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, le calcul de $(f^{-1})''$ est plus compliqué (essayez).

4.5 Fonctions usuelles

4.5.1 Exponentielle, logarithme népérien

Définition 4.5.1 (fonction exponentielle)
Il existe une fonction unique $x \mapsto y(x)$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
On l'appelle la *fonction exponentielle*, et on la note $x \mapsto \exp(x)$.

Définition 4.5.2
La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Sa bijection réciproque, de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, appelée *fonction logarithme népérien*, est notée $x \mapsto \ln x$.

Propriétés

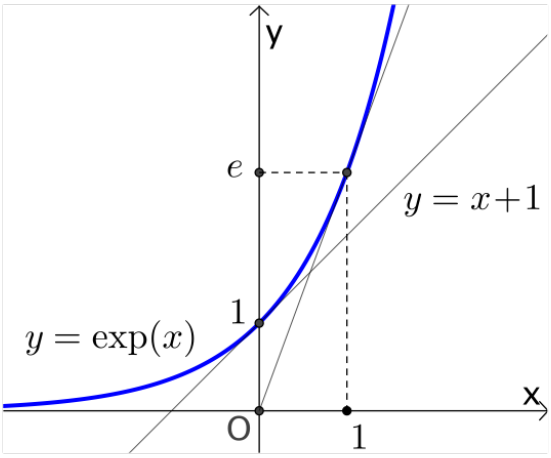
– Par définition, on a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$

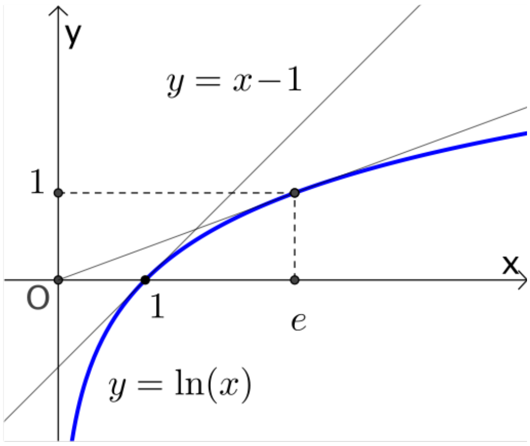
– La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$.
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\, x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

– On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln(e) = 1$. On a : e ≈ 2.718281828.

- Le logarithme népérien est l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$, s'annulant en $x=1$, de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
  En d'autres termes : $\forall x > 0,\ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
- La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est $\exp(x) > 0$).
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \geqslant 1 + x$ (égalité $\Leftrightarrow\ x = 0$).
  La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave (sa dérivée seconde est $-\dfrac{1}{x^2} < 0$).
  Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln(x) \leqslant x - 1$ (égalité $\Leftrightarrow\ x = 1$).

Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$:





Propriétés fonctionnelles :

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$: $\exp(x+y) = \exp(x)\ \exp(y)$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Notation $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.

Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.

On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$.

On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque.

Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.

Limites usuelles :

Pour l'exponentielle : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1 \end{cases}$

Pour le logarithme népérien : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0^- \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \end{cases}$

4.5.2 Fonctions exponentielles de base quelconque

Définition 4.5.3 (fonctions exponentielles de base quelconque)
Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose $a^x = \exp(x \ln(a))$.
La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a*.

Propriétés des fonctions exponentielles de base quelconque

– Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction $x \mapsto \exp(x)$, déjà notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
La fonction $x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$ est donc la fonction exponentielle de base e.

– La notation a^x étend la définition de a^r pour r rationnel.

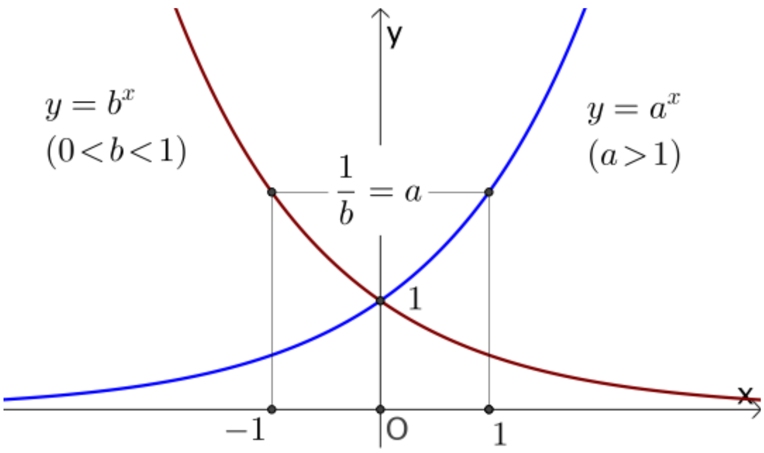
– Pour tout réel $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln(a))a^x$.

– La fonction $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$

– Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ appelée fonction logarithme de base a.
Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_{10} x = \log x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ et elle est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$.

– Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

– Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto b^x$, avec $a > 1$ et $b = \dfrac{1}{a}$:



Propriétés fonctionnelles

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, pour tout a, b de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $\begin{cases} a^{x+y} = a^x\, a^y, & a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, & a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y = a^{xy}, & a^x\, b^x = (ab)^x, & \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \end{cases}$

Limites usuelles : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$

4.5.3 Fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$, avec α réel

Définition 4.5.4 (fonctions puissances)
Soit α un nombre réel quelconque.
On appelle *fonction puissance d'exposant* α la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Propriétés

– Quand l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{+*}$).

– La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
Sur son domaine $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même.
Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/\alpha}$

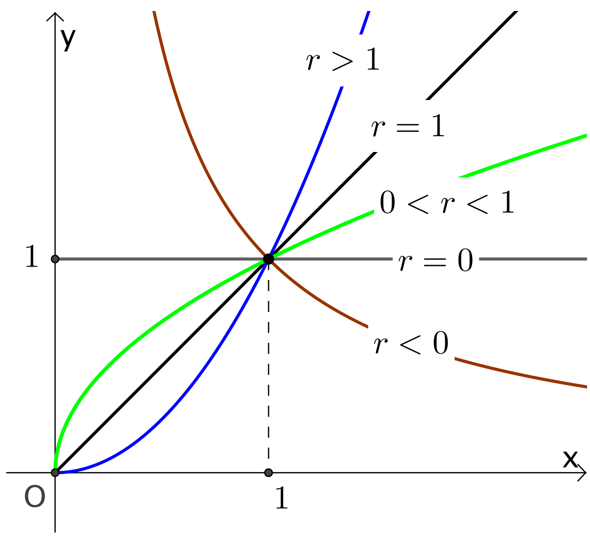
– Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0.
En $(0, 0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$.
Toutes les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1, 1)$.

– Le placement des différentes courbes est le suivant :
$\forall\, x > 0,\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$: $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$
Ainsi, les puissances sont dans l'ordre des exposants pour $x > 1$, et dans l'ordre contraire avant.

Propriétés fonctionnelles

Pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout α, β de $\mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\, x^\beta, & x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}, & x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} \\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, & x^\alpha\, y^\alpha = (xy)^\alpha, & \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha \end{cases}$

Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^r$



Croissances comparées

Les limites suivantes sont importantes à connaître. Elles constituent une « échelle de comparaison » entre fonctions puissances, fonction exponentielle, et fonction logarithme :

$$\begin{cases} \forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\,\beta > 0 : \quad \lim\limits_{-\infty} |x|^{\alpha} \exp^{\beta}(x) = 0 \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} = +\infty \\ \forall\,\alpha > 0,\ \forall\,\beta > 0 : \quad \lim\limits_{0^+} x^{\alpha}\,|\ln(x)|^{\beta} = 0 \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

On peut compléter les résultats précédents avec les fonctions exponentielles de base $a > 0$.

Tout dépend en fait de la position de a par rapport à 1.

$$\begin{cases} \forall\,m > 0,\ \forall\,a > 1 : \quad \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^m\, a^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^m} = +\infty \\ \forall\,m > 0,\ \forall\,a \in]0,1[: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{|x|^m} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^m a^x = 0 \end{cases}$$

4.5.4 Dérivée logarithmique

Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.

En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$.

La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Définition 4.5.5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de la fonction $\ln|f|$.

Proposition 4.5.1

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables et strictement positives sur l'intervalle I.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$.

Alors la dérivée logarithmique de g est $\dfrac{g'}{g} = \alpha_1 \dfrac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \dfrac{f_2'}{f_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{f_n'}{f_n}$.

La dérivée logarithmique s'avère donc un moyen commode de calculer la dérivée d'une fonction qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits ou de puissances.

Exemple d'utilisation de la dérivée logarithmique

Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Les théorèmes généraux ne permettent pas de se prononcer pour les valeurs $x = -2$ et $x = 0$.

En revanche, ils permettent de dire que f est dérivable sur (au moins) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, on a : $\ln(f(x)) = \dfrac{1}{2}\ln|x(x+2)| + \dfrac{1}{x}$.

En dérivant, on obtient : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)} f$.

En dérivant à nouveau sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}f'(x)+\frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2}f(x) \\ &= \frac{(x^2-2)^2+(-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2}f(x)=\frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2}f(x) \end{aligned}$$

On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

4.5.5 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions sinus, cosinus, tangente, ont été vues dans "Nombres complexes et trigonométrie".

Définition 4.5.6 (fonction arcsin)
La restriction à $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de $x\mapsto\sin(x)$ est une bijection de I sur $J=[-1,1]$.
La bijection réciproque est notée $x\mapsto\arcsin(x)$ (fonction "arc sinus").

Propriétés

– La fonction $x\mapsto\arcsin(x)$ est une bijection de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
– Pour tout x de $[-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à x :

$$\begin{cases} y=\arcsin(x) \\ x\in[-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin(y) \\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

– Quelques valeurs particulières :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

– Pour tout x de $[-1,1]$, $\sin(\arcsin(x))=x$.
  Pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x))=x$ (attention au domaine !)
  Pour tout x de $[-1,1]$, $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$.
  Pour tout x de $]-1,1[$, $\tan(\arcsin(x))=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
– Dérivée : pour tout x de $]-1,1[$, $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 4.5.7 (fonction arccos)
La restriction à $I = [0, \pi]$ de $x \mapsto \cos(x)$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (fonction "arc cosinus").

Propriétés

– La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.
  Elle est continue et strictement décroissante.

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'angle compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à x :

$$\begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

– Quelques valeurs particulières :

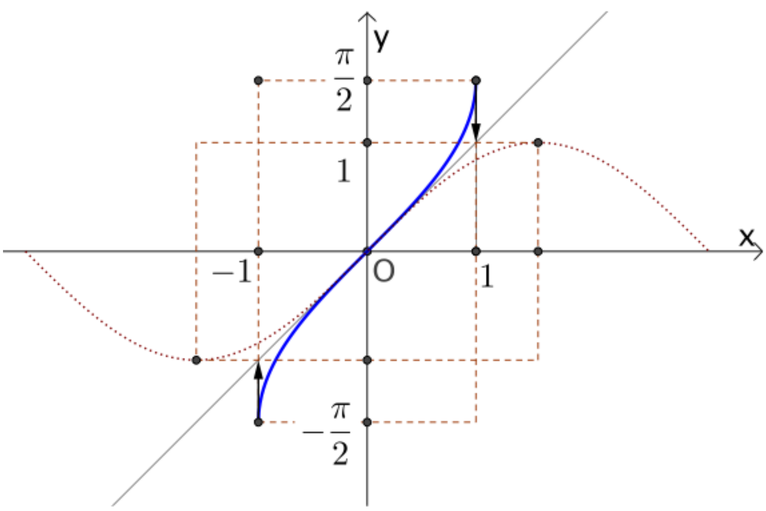
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

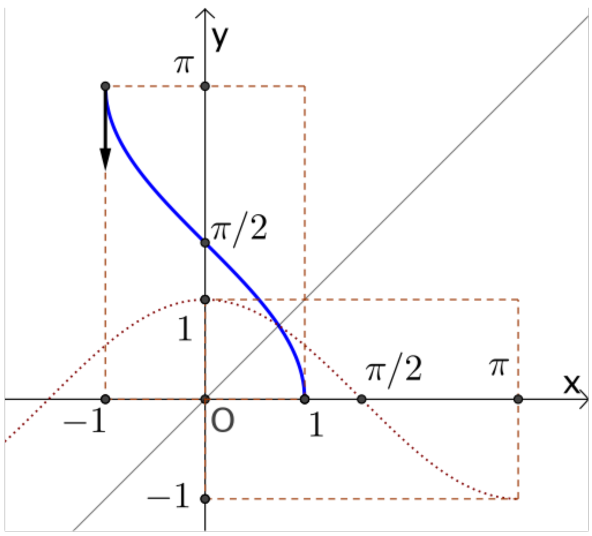
– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.
  Pour tout x de $[0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$ (attention au domaine !)
  Pour tout x de $[-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
  Pour tout x de $[-1, 0\,[\cup]\,0, 1]$, $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$.
  Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

– Dérivée : pour tout x de $]-1, 1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Courbe représentative des fonctions $x \mapsto \arcsin(x)$ **et** $x \mapsto \arccos(x)$:





Définition 4.5.8 (fonction arctan)
La restriction à $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \tan(x)$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (fonction "arc tangente").

Propriétés

– La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Elle est continue, strictement croissante, et impaire.

– Pour tout x réel, $\arctan(x)$ est l'angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est égale à x :

$$\begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

– Quelques valeurs particulières :

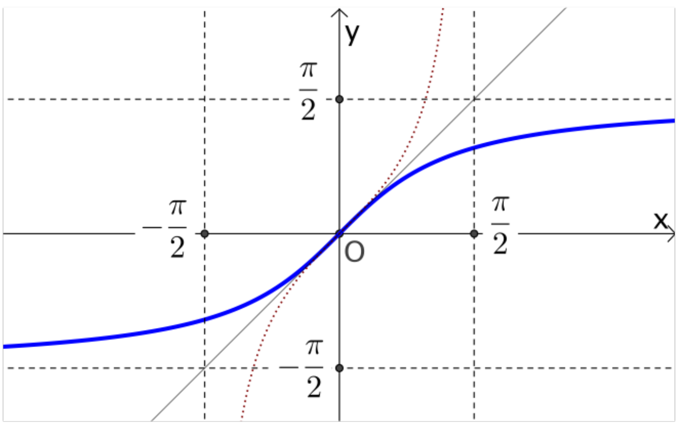
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

– Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$ (attention au domaine !).
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

– Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

– Dérivée : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$:



4.5.6 Fonctions hyperboliques

Définition 4.5.9 (fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$)

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (fonction "cosinus hyperbolique")

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (fonction "sinus hyperbolique")

Propriétés

– Les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
  Les deux fonctions $x \mapsto y = \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto y = \operatorname{sh}(x)$ sont donc solutions de $y'' = y$.
  La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ est paire, et la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ est impaire.

– $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \mathrm{e}^x \\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases},\ \begin{cases} \operatorname{ch}(x) \geqslant 1 \\ \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \end{cases}$

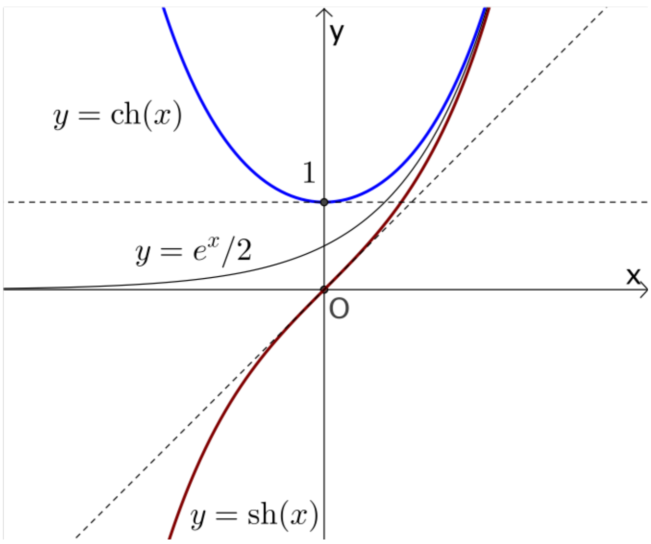
– $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = 1 \iff \begin{cases} \exists\, t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch}(t) = x,\ \operatorname{sh}(t) = y \end{cases}$
  La fonction $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ est un paramétrage de l'arc d'hyperbole $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

– Au voisinage de l'origine, on a : $\operatorname{sh}(x) \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion).
  Toujours au voisinage de 0, on a l'équivalent : $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$.

– Au voisinage de $+\infty$, on a : $\operatorname{ch}(x) \sim \operatorname{sh}(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
  Les deux courbes $y = \operatorname{ch}(x)$ et $y = \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes à $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ (avec $\operatorname{sh}(x) < \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} < \operatorname{ch}(x)$)

– Au voisinage de $-\infty$, on a : $\operatorname{ch}(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) \sim -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$:



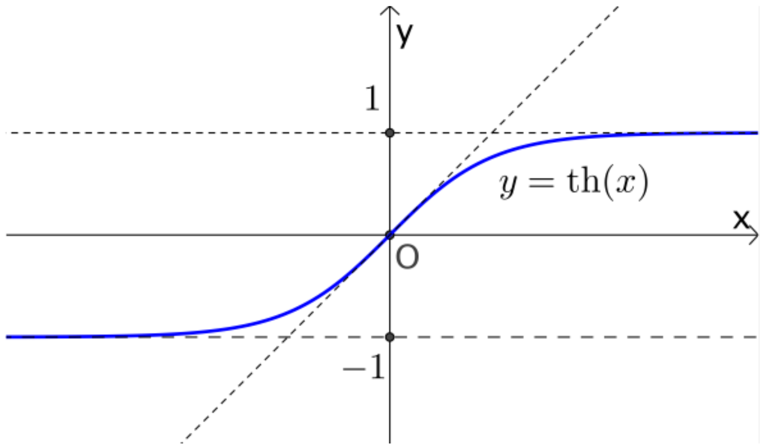
Définition 4.5.10 (fonction $x \mapsto \text{th}\,(x)$)

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\text{th}\,(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ (fonction "tangente hyperbolique")

Propriétés

- La fonction $x \mapsto \text{th}\,(x)$ est impaire. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}\,(x) = 1$.
  Au voisinage de 0, on a : $\text{th}\,(x) \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion).
- La fonction $x \mapsto \text{th}\,(x)$ est indéfiniment dérivable : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{th}\,'(x) = 1 - \text{th}^{\,2}(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\text{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$, et $|\text{th}\,(x)| \leqslant 1$.

Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \text{th}\,(x)$:



4.5.7 Trigonométrie hyperbolique

- ch, sh et th d'une somme ou d'une différence :

$$\begin{cases} \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y) \\ \text{ch}(x-y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\,\text{sh}(y) \\ \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y) \\ \text{sh}(x-y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) - \text{ch}(x)\,\text{sh}(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ch}(2x) = 2\,\text{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\,\text{sh}^2(x) \\ \text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x) \end{cases}$$

$$\text{th}\,(x+y) = \frac{\text{th}\,(x) + \text{th}\,(y)}{1 + \text{th}\,(x)\text{th}\,(y)}, \qquad \text{th}\,(x-y) = \frac{\text{th}\,(x) - \text{th}\,(y)}{1 - \text{th}\,(x)\text{th}\,(y)}, \qquad \text{th}\,2x = \frac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^{\,2}(x)}$$

- Transformations de produits en sommes et de sommes en produits.

$$\begin{cases} \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) = \dfrac{1}{2}(\text{ch}(x+y) + \text{ch}(x-y)) \\ \text{sh}(x)\,\text{sh}(y) = \dfrac{1}{2}(\text{ch}(x+y) - \text{ch}(x-y)) \\ \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) = \dfrac{1}{2}(\text{sh}(x+y) + \text{sh}(x-y)) \\ \text{ch}^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \text{ch}(2x)) \ \text{ et } \ \text{sh}^2(x) = \dfrac{1}{2}(\text{ch}(2x) - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ch}\,p + \text{ch}\,q = 2\,\text{ch}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \text{ch}\,p - \text{ch}\,q = 2\,\text{sh}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\text{sh}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \text{sh}\,p + \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \text{sh}\,p - \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\text{ch}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

– Changement de variable $t = \operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$: $\quad \operatorname{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{th}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

– Changement de variable $u = \mathrm{e}^x$: $\quad \operatorname{ch}(x) = \dfrac{u^2+1}{2u}, \quad \operatorname{sh}(x) = \dfrac{u^2-1}{2u}, \quad \operatorname{th}(x) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$

– Linéarisation.
  On écrit $\operatorname{ch}^n(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n$ et $\operatorname{sh}^n(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n$.
  On développe (formule du binôme), on groupe les termes équidistants des extrémités, et on réutilise les définitions pour retrouver des $\operatorname{ch}(px)$ et/ou des $\operatorname{sh}(px)$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^4(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4x} - 4\mathrm{e}^{2x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-4x}\right) = \frac{1}{8}\left(\operatorname{ch}(4x) - 4\operatorname{ch}(2x) + 3\right)\\
\operatorname{sh}^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{5x} - 5\mathrm{e}^{3x} + 10\mathrm{e}^{x} - 10\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-5x}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(\operatorname{sh}(5x) - 5\operatorname{sh}(3x) + 10\operatorname{sh}(x)\right)
\end{aligned}$$

– Opération inverse de la linéarisation.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx} = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$
  On peut ainsi exprimer $\operatorname{ch}(nx), \operatorname{sh}(nx)$ en fonction de puissances de $\operatorname{ch}(x)$ et/ou de $\operatorname{sh}(x)$.
  Pour cela on développe $(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n$ par la formule du binôme.
  La partie paire (resp. impaire) du résultat est alors égale à $\operatorname{ch}(nx)$ (resp. $\operatorname{sh}(nx)$).
  $(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^4 = \operatorname{ch}^4(x) + 4\operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(x) + 6\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x) + 4\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^3(x) + \operatorname{sh}^4(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\operatorname{ch}(4x) = \operatorname{ch}^4(x) + 6\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}^4(x)\\ \operatorname{sh}(4x) = 4\operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(x) + 4\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^3(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\operatorname{ch}(4x) = \operatorname{ch}^4(x) + 6\operatorname{ch}^2(x)(\operatorname{ch}^2(x) - 1) + (\operatorname{ch}^2(x) - 1)^2\\ \operatorname{sh}(4x) = 4\operatorname{ch}(x)((1 + \operatorname{sh}^2(x))\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}^3(x))\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{ch}(4x) = 8\operatorname{ch}^4(x) - 8\operatorname{ch}^2(x) + 1\\ \operatorname{sh}(4x) = 4\operatorname{ch}(x)(2\operatorname{sh}^3(x) + \operatorname{sh}(x))\end{cases}$$

– Liens entre la trigonométrie hyperbolique et la trigonométrie circulaire.
  Les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être retrouvées à partir de celles de la trigonométrie circulaire, avec : $\quad \cos(ix) = \operatorname{ch}(x), \quad \sin(ix) = i\operatorname{sh}(x), \quad \tan(ix) = i\operatorname{th}(x)$.
  Par exemple :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \frac{1}{4}(-\sin(3x) + 3\sin(x)) \ \Rightarrow\ \sin^3(ix) = \frac{1}{4}(-\sin(3ix) + 3\sin(ix))\\
&\Rightarrow\ -i\operatorname{sh}^3(x) = \frac{1}{4}(-i\operatorname{sh}(3x) + 3i\operatorname{sh}(x)) \ \Rightarrow\ \operatorname{sh}^3(x) = \frac{1}{4}(\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh}(x))
\end{aligned}$$

4.6 Études de fonctions, inégalités

4.6.1 Plan d'étude d'une fonction numérique

L'« étude » d'une fonction numérique f consiste en général en les étapes suivantes :

– Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ et la dérivabilité de f (sur $\mathcal{D}$, sauf peut-être en des points isolés).
– Si f est périodique, ou si on devine un axe ou un centre de symétrie (du fait notamment de la parité ou de l'imparité de f), on en profite pour réduire « le domaine d'étude ».
  Si on ne devine rien, il est prudent de dire « pas de réduction évidente du domaine d'étude ».

– Étudier le sens de variation de f, et dresser le *tableau de variations*.
  On pourra compléter ce tableau par les « limites aux bornes du domaine ».
– Effectuer les études locales pour une compréhension fine du comportement de f en certains points : ceux par exemple où la dérivabilité de f pose problème, ou encore les *branches infinies*.
– Tracer **soigneusement** la courbe représentative.

Nous allons maintenant revenir en détail sur quelques-unes de ces étapes.

4.6.2 Dérivabilité sur le domaine de définition

On commence toujours par préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

Il s'agit en général d'un intervalle, ou d'une réunion d'intervalles.

On indique ensuite sur quelle partie de ce domaine on peut appliquer les résultats généraux portant sur les opérations entre fonctions usuelles, et donc conclure à la continuité et/ou à la dérivabilité de f.

On est d'ailleurs souvent amené à affirmer directement que f est indéfiniment dérivable sur son domaine (ou sur une partie de celui-ci) en vertu de ces mêmes résultats.

À ce stade, il est possible que certains points isolés « posent problème » (on ne peut appliquer les résultats généraux). Cela ne veut pas dire, pour autant, que f ne sera pas dérivable en ces points, et il conviendra de répondre (plus tard) à cette question par des « études locales ».

4.6.3 Réduction du domaine d'étude

Connaissant le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f, on détermine le *domaine d'étude* $\mathcal{D}_e$ de f, c'est-à-dire la partie de $\mathcal{D}$ sur laquelle il suffit d'étudier f pour connaître son comportement global.

C'est ici le moment d'indiquer si la fonction f est T-périodique (ce qui permet de réduire l'étude à un intervalle de longueur T), et si elle est paire ou impaire (pour se limiter alors à $x \geqslant 0$).

Plus exceptionnellement, il se peut que f vérifie des égalités $f(2a-x) = f(x)$ (axe de symétrie $x = a$) ou $f(2a-x) = -f(x)$ (centre de symétrie $(a, 0)$) ou $f(2a-x) = 2b - f(x)$ (centre de symétrie (a, b)).
Dans ce cas, on limite l'étude à $x \geqslant a$ (ou à $x \leqslant a$).

Il arrive parfois que f soit paire (ou impaire) <u>et</u> T-périodique, auquel cas on pourra se contenter de l'étude de f sur une *demi-période* (souvent l'intervalle $[0, T/2]$).

Si T est une période de f, on vérifiera qu'elle est la « plus petite période » (essayer $T/2$ par exemple).

Il arrive parfois que si T est une période f, on ait $f(x + T/2) = -f(x)$, ou $f(T - x) = f(x)$. L'étude peut alors être réduite à un intervalle de longueur $T/2$.

4.6.4 Tableau des variations

Connaissant le domaine d'étude $\mathcal{D}_e$ de f, on examine le sens de variations de f.

Cela consiste à dire, intervalle par intervalle, si f est croissante ou décroissante, et à signaler les extremums *relatifs* (on dit aussi *locaux*) ou *absolus* (on dit aussi *globaux*).

L'étude du sens de variation de f passe souvent par le signe de f', mais il arrive parfois qu'on puisse conclure par des résultats généraux sur les opérations entre fonctions monotones usuelles.

Il arrive aussi que l'étude du signe de f' ne soit pas particulièrement facile : dans certains cas, on est amené à étudier les variations de f'', ou à étudier une fonction auxiliaire.

Le tableau des variations, soigné, doit indiquer clairement les intervalles formant le domaine d'étude.

On apportera un intérêt particulier aux frontières de ces intervalles, ainsi qu'aux points qui présentent un intérêt certain (notamment ceux où f possède un maximum ou un minimum local). On signalera par exemple les intersections du graphe (Γ) de f avec les axes (et en particulier avec Ox : il s'agit alors d'indiquer pour quelles valeurs de x la fonction f s'annule).

Le tableau de variation contient en général une ligne pour le signe de f', mais on peut être amené à utiliser une ligne supplémentaire pour le signe de f'' : c'est l'occasion de préciser la concavité de f, et ses éventuels points d'inflexion.

4.6.5 Études locales et tracé du graphe

Après l'étude globale (réduction éventuelle du domaine d'étude, sens de variation) et avant de procéder au tracé de la courbe représentative de f, il peut être nécessaire de préciser quelques études locales.

Prolongement par continuité

On étudie les réels a éventuels où la continuité ou la dérivabilité de f pose problème (c'est-à-dire ne découle pas des résultats généraux sur les opérations entre fonctions continues ou dérivables).

On examine s'il y a une limite finie $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (des deux cotés de a, ou d'un seul).

Si c'est le cas, on peut effectuer un *prolongement par continuité* en posant $f(a) = b$.

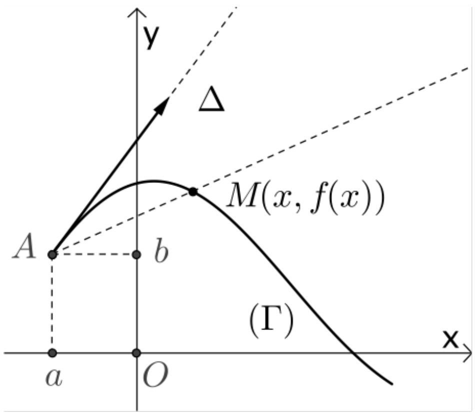
Demi-tangente horizontale ou oblique

Pour examiner l'existence d'une tangente au point $A(a, b)$, on calcule la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On cherche ainsi la position limite de la corde de $A(a, f(a))$ à $M(x, f(x))$ quand « M tend vers A ».

Supposons par exemple $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \delta$ ($\delta \in \mathbb{R}$).

On conclut alors à la présence en $A(a, f(a))$ d'une tangente (ou d'une demi-tangente) Δ à la courbe (Γ), de coefficient directeur δ (donc horizontale si $\delta = 0$, et oblique si $\delta \neq 0$).



L'équation de cette (demi-)tangente Δ est $y = f(a) + (x - a)\delta$.

Il est recommandé de préciser le placement de (Γ) par rapport à cette demi-tangente, donc d'étudier le signe de la différence $f(x) - f(a) - \delta(x - a)$ quand x tend vers a.

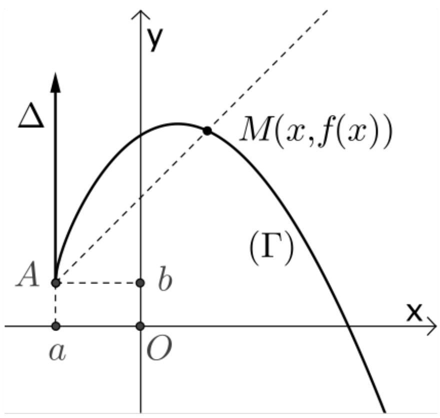
Demi-tangente verticale

Supposons au contraire $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

On conclut dans ce cas à la présence d'une tangente (ou demi-tangente) verticale en $A(a, b = f(a))$.

On illustrera par un dessin (pour une demi-tangente, on indiquera dans quel sens elle est dirigée).

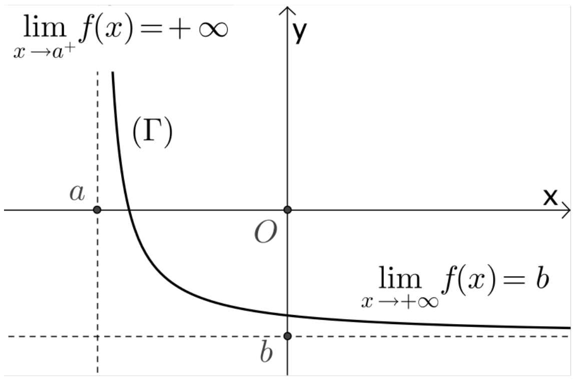
Bien sûr cela demande parfois des connaissances et des techniques assez fines en analyse (par exemple l'utilisation des développements limités), qui ne sont pas forcément acquises à ce stade de l'année.



Asymptotes verticales ou horizontales

On note les réels a éventuels tels que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

À un tel a correspond l'asymptote verticale $x = a$ (faire un dessin pour préciser l'allure).



Autre étude locale importante : quand $x \to \pm\infty$.
Supposons par exemple $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$).

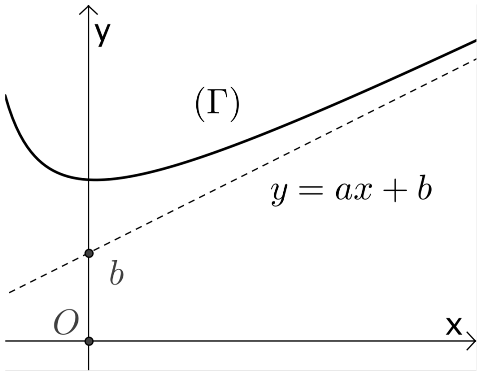
On a alors l'*asymptote horizontale* d'équation $y = b$.

On placera (Γ) par rapport à cette asymptote (signe de $f(x) - b$, ou sens de variations de f).

Asymptotes obliques

On suppose ici que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Il est alors *possible* que le graphe (Γ) de f présente une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.
On pourra conclure à l'existence d'une telle asymptote de l'une des manières suivantes :



– On écrit $y = ax + b + \varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

  Dans ce cas, le signe de φ indique la position de (Γ) par rapport à l'asymptote.

– On trouve $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ puis $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$.

  Le signe de $f(x) - ax - b$ donne le placement.

Là encore, les « développements limités », non encore abordés, peuvent être très utiles.

Branches paraboliques

Il y a deux autres cas fréquents, toujours sous l'hypothèse $\lim\limits_{x\pm\infty} f(x) = \infty$:

– Si $\lim\limits_{x\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que (Γ) présente une branche parabolique dans la direction Oy.

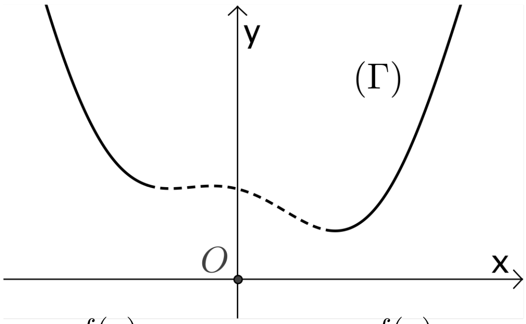
  On précisera si la branche parabolique est tournée vers les $y > 0$ ou vers les $y < 0$.

  Cette terminologie est à rapprocher de l'allure du graphe de $x \mapsto x^2$ quand $x \to \pm\infty$.

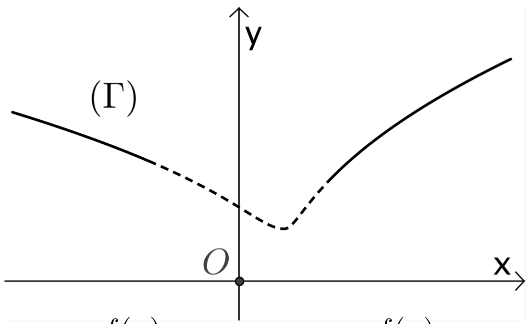
– Si $\lim\limits_{x\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que (Γ) présente une branche parabolique dans la direction Ox.

  Cette terminologie est à rapprocher de l'allure du graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$ quand $x \to +\infty$.

  Dans ce cas, comme dans tous les précédents, penser à illustrer par un dessin !



$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^-$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^+$

4.6.6 Quelques inégalités utiles

Il est très souvent nécessaire de procéder à des majorations, des minorations, des encadrements.

Bien des techniques sont possibles, et notamment purement algébriques dans les cas les plus simples.

Souvent les inégalités seront obtenues par l'étude du signe d'une expression $f(x)$, ce signe résultant lui-même du sens de variations de f.

▷ Inégalités de convexité

Proposition 4.6.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et convexe (donc telle que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I).
Soit a un élément de I. Pour tout x de I, on a l'inégalité : $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$.

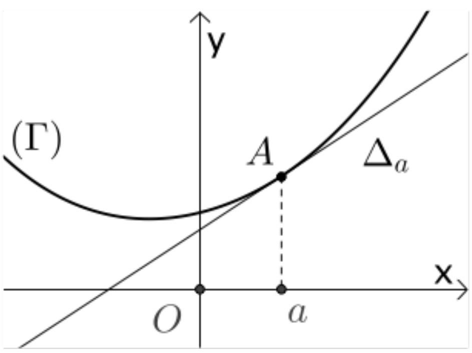
Proposition 4.6.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et convexe (donc telle que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I).
Soit a, b deux éléments de I, avec $a \leqslant b$. Alors on a l'inégalité : $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
Plus généralement, pour tout λ de $[0,1]$, on a : $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.

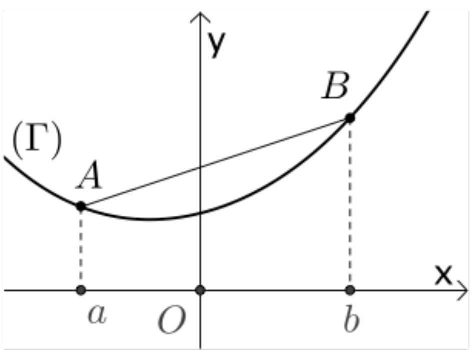
Remarque : dans le cas d'une application concave ($f'' \leqslant 0$), les inégalités sont inversées.

Interprétations graphiques, en notant (Γ) le graphe d'une fonction numérique convexe f :

– La courbe (Γ) est « partout au-dessus » de sa tangente Δ_a au point $A(a, f(a))$.
– L'arc de (Γ) situé entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est situé « en-dessous » de la corde $[A; B]$



f convexe :
courbe (Γ) au-dessus de la tangente Δ_a



f convexe :
arc (AB) en-dessous de la corde $[A; B]$

Voici deux cas particuliers très importants :

Proposition 4.6.3
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x$, *avec égalité si et seulement si* $x = 0$.
Pour tout $x > -1$, *on a :* $\ln(1 + x) \leqslant x$, *avec égalité si et seulement si* $x = 0$.

▷ Moyenne géométrique et moyenne arithmétique

Proposition 4.6.4
Soit x, y deux réels positifs ou nuls.
Alors on a l'inégalité $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a + b)$, *avec égalité si et seulement si* $a = b$.

L'inégalité classique suivante peut être vue comme un cas particulier :

Proposition 4.6.5
Pour tout x de $[0, 1]$, on a $0 \leqslant x(1 - x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, *avec égalité si et seulement si* $x = \dfrac{1}{2}$.

On peut au contraire généraliser à une famille de n réels positifs ou nuls.

Proposition 4.6.6
Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de n réels positifs ou nuls.
Soit $G = \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n}$ *la* moyenne géométrique *des x_k, et* $A = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *leur* moyenne arithmétique.
Alors on a l'inégalité $A \geqslant G$ (avec égalité si et seulement si les x_k sont tous égaux)

▷ Inégalités trigonométriques

Proposition 4.6.7
Pour tout réel x on a : $\quad |\sin(x)| \leqslant |x|, \quad$ *et* $\quad |1 - \cos(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

▷ Inégalité de Bernoulli

Proposition 4.6.8
Pour tout $n \geqslant 2$, et tout $x > -1$, on a : $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ *(égalité si et seulement si $x = 0$).*

▷ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 4.6.9 (inégalité de Cauchy-Schwarz)
Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ *et* $y_1, \ldots, y_n$, *on a l'inégalité :* $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\Big)$
Il y a égalité si et seulement si les n-uplets $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ sont proportionnels.